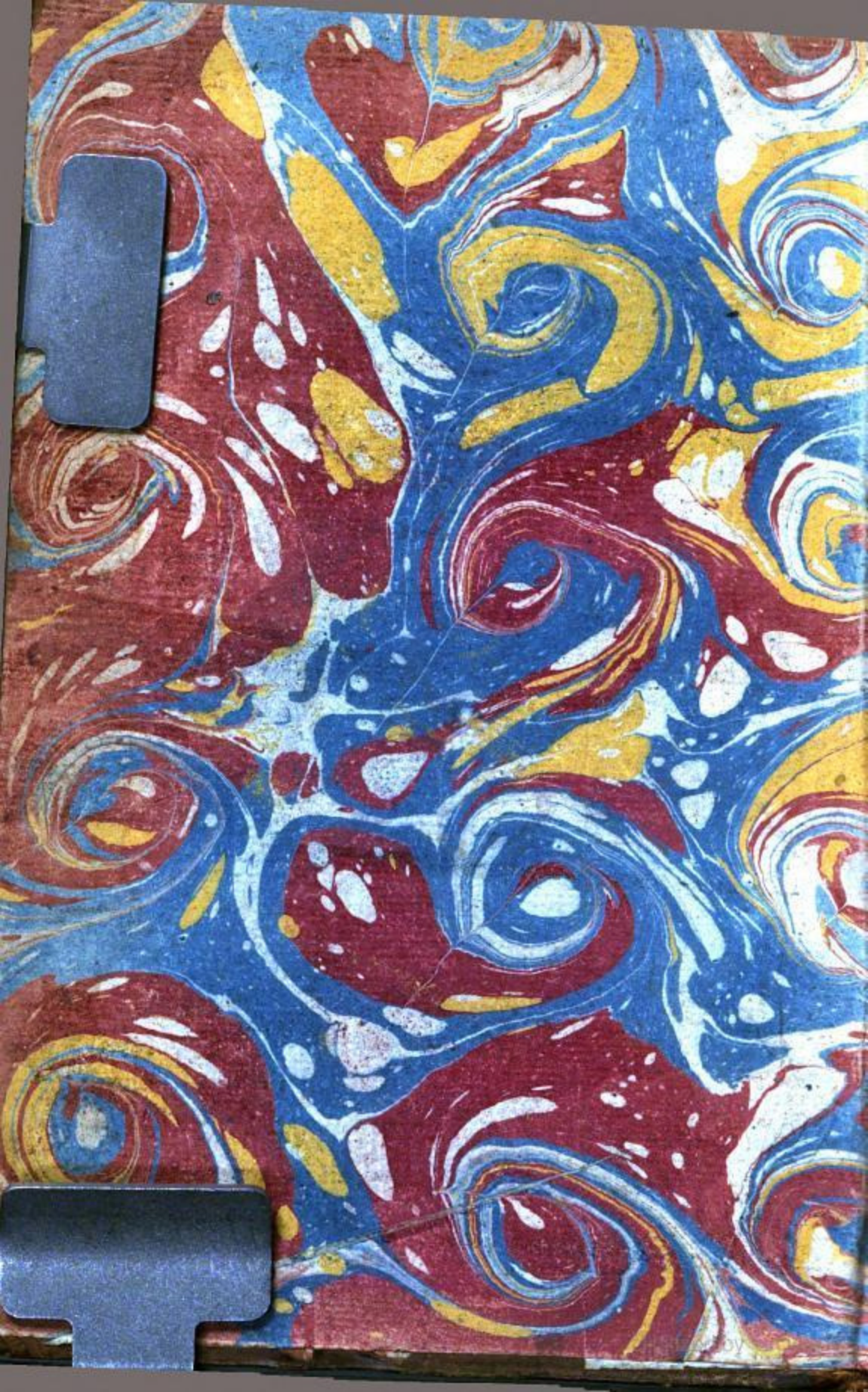
TRAITÉ DE L'ALGEBRE. PAR M. DE CROUZAS, DE L'ACADEMIE ROYALE DES...

Jean Pierre : de Crousaz

Digitized by Google



5 M N. 8.

Digitized by Google

Digitized by Google

5. 8. 273

Digitized by Google

TRAITE
DE
L'ALGEBRE.

Par M. DE CROUZAS, *de l'Academie Royale des Sciences.*

A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Libraire-Imprimeur Juré de l'Université, Quay des Auguſtins, près le Pont Saint Michel.

M. DCC. XXVI.
Avec Approbation, & Privilege du Roy.

Digitized by Google

Digitized by Google

A MONSIEUR
DE REAUMUR,
DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Toutes les fois, MONSIEUR, *que je tombe sur quelques-uns de ces* MEMOIRES *dont vous avez enrichi celui de tous les Ouvrages des Hommes qui doit le plus durer,*

Digitized by Google

plus j'y donne d'attention ; plus je me trouve naturellement conduit à admirer la PREMIERE CAUSE *des merveilleuſes varietez que vous décrivez ſi bien, & qui n'ont pû échaper à vos curieuſes & infatigables Recherches. Je vous dois,* MONSIEUR, *des Reflexions qui me rempliſſent de reſpect pour le Suprême Auteur de toutes choſes, qui animent ma reconnoiſſance & mon zele à le ſervir, qui avancent & qui affermiſſent ce que je trouve en moi de probité. Par là mon cœur s'eſt tout-à-fait lié au vôtre : je me ſuis flatté,* MONSIEUR, *d'être entré dans vos idées & dans vos ſentimens ; heureux ſi mon ſort m'avoit procuré l'avantage de vous voir de plus près, pour vous imiter mieux. J'ajoûterai encore que je vous ai ſi bien connu, que le noble deſintereſſement avec lequel vous avez publié vos Découvertes ſur le Fer & l'Acier, ne m'a pas donné la moindre ſurpriſe. Je ſuis ſûr que vous vous reprocheriez beau-*

Digitized by Google

coup plus d'avoir manqué à la Morale, que vous ne vous feliciteriez d'avoir excellé en Physique. Mais en ne voïant rien dans votre conduite à quoi je ne me fusse attendu, je me suis convaincu qu'on peut admirer sans être surpris. Je n'ai pû, MONSIEUR, *me refuser la satisfaction de faire connoître au Public que je vous rens ce que je vous dois, & que vous êtes un des Hommes du monde que j'estime & que j'honore le plus, & de qui je suis avec le plus d'attachement,*

MONSIEUR,

Le très-humble & très-obéïssant serviteur J. P.
DE CROUZAS.

Digitized by Google

PREFACE.

L'ALGEBRE eſt d'une ſi grande utilité dans le reſte des Mathematiques; on reſout par ſon moïen les Problêmes de Geometrie avec tant de facilité; des Calculs dont on a beſoin en Phyſique, & leur Demonſtration ſe font, par ſon ſecours, d'une maniere ſi generale & ſi abregée, qu'on ne peut plus ſe paſſer de la connoître & ſçavoir en faire uſage.

Avant la découverte du Calcul Differentiel, on la regardoit à peu près pour le dernier effort de l'eſprit humain. Un temps même a été que cette Etude paſſoit pour dangereuſe, & que l'on comptoit comme la preuve aſſurée d'une bonne tête d'y avoir reüſſi ſans ſe troubler, & ſans que la raiſon en reçût aucune atteinte.

Il s'en faut pourtant beaucoup qu'elle ne ſoit auſſi obſcure & auſſi difficile à apprendre qu'on ſe l'imagine ordinairement. Il eſt vrai qu'il ne faut pas une médiocre peine pour s'en inſtruire dans les Livres de ſes premiers Inventeurs, ſoit par un ſort

Digitized by Google

commun à toutes les découvertes, qui ne ſont jamais accomplies dans leur naiſſance ; ſoit qu'il faille encore attribuer ce défaut au malheur des temps, dans leſquels la barbarie & l'autorité des Ecoles avoit familiariſé les plus grands Génies avec les circuits & les expreſſions pompeuſes & obſcures.

Mais, indépendamment de ces cauſes-là, & de ces circonſtances, je reconnois que l'Algebre a quelque choſe qui embarraſſe, qui effraïe & qui rebute dans les commencemens ceux qui en entreprennent l'étude. Je ne veux pas parler de ces Signes & de ce Langage auquel on n'eſt point fait. Compter cela pour quelque choſe, ce ſeroit une puerilité, à laquelle je ne veux pas faire d'attention : il eſt d'autres endroits par où elle peut étonner de bons Génies & leur faire de la peine.

Avant que d'étudier l'Algebre on a appris l'Arithmetique. Les Chifres par leſquels on exprime les Nombres, ont, en vertu de leur figure, ou en vertu de leur place ; ou plûtôt, en vertu de la ſignification que l'uſage y a attaché, la force d'exprimer chacun un Nombre déterminé. Ils preſentent donc des idées préciſes, & que l'on ſaiſit aiſément ; on n'a point de peine de comprendre, en calcu-

Digitized by Google

lant la raiſon de ce que l'on fait ; mais les Lettres & les Signes dont on ſe ſert dans les Calculs Algebriques, à la place des Chifres, ne preſentent point d'idées diſtinctes ; b, par exemple, peut ſignifier 1, 5, 3000, 4717, &c. En un mot, je puis m'en ſervir pour deſigner quelque Nombre qu'il me plaira. Auſſi, au lieu qu'une concluſion tirée par un Calcul Arithmetique, ne preſente qu'un ſeul exemple, les concluſions d'un Calcul Algebrique ſont applicables à une infinite d'exemples, & veritablement demonſtratives & univerſelles. Mais avant qu'on ſe ſoit accoûtumé à des expreſſions ſi generales, il faut du temps ; & au commencement on ſe rebute, parce qu'il ſemble qu'on ne ſaiſit rien, & qu'on ne peut pas deviner à quoi aboutiront des manieres d'agencer des Lettres où l'on ne voit goute.

Quand je dis 2 multiplié par 3, produit 6, je comprens d'abord cette verité ; & ſi j'ajoûte × ſera la marque d'une Multiplication, = marque d'une égalité, & que j'écrive $2 \times 3 = 6$, cette maniere d'écrire n'aura rien d'obſcur. Il n'en ſera pas de même, ſi je dis $a \times b = ab$, & ſi je fais $ab = c$, $c \times d = cd = abd$; & en faiſant pour abreger, $abd = e$, $e \times f = ef = abdf = cdf$. On ne ſçait pourquoi on le nieroit,

Digitized by Google

mais on ne ſçait gueres mieux pourquoi on en tombe d'accord. Accoûtumez-vous-y, dit-on, l'uſage vous rendra ces expreſſions claires, à meſures qu'elles vous deviendront familieres. Je n'en conviens pas tout-à-fait. On pourroit ſeulement s'accoûtumer à paſſer ſur leur obſcurité. Il vaut mieux, ce me ſemble, faire penſer, autant qu'il ſe peut, aux choſes mêmes dont ces Signes prennent la place. Voila pourquoi je dirai : Une Quantité que j'appellerai a, multipliée par une autre que j'appellerai b, en formera une 3e que j'appellerai ab, pour me ſouvenir des deux qui l'ont produite, ou c, pour m'exprimer avec plus d'abregé. Ce Produit ab, ou cette Somme c, je puis enſuite la multiplier par une autre que j'appellerai d, & abd; ou cd, m'avertira de ce que j'ai fait; ce m'en ſera un memorial. Quand donc les Sommes a, b, d, me ſeront connuës, la vûë de leurs Signes m'avertira de ce que je dois faire de ces Sommes.

De même, ſi je dis a & b s'expriment ainſi $a + b$, & $a + b \times a + b$, donne $aa + 2ab + bb$. Donc tout Produit de deux Racines, multipliées par elles-mêmes, eſt compoſé, 1°. Du Quarré de la premiere. 2°. De deux Produits de la ſeconde par la premiere. 3°. Du Quarré de

Digitized by Google

la ſeconde. Cette concluſion ainſi tirée ne paroît pas aſſez claire & aſſez ſûre. Je dirai donc : Quand j'ai deux Quantitez, dont j'appelle une *a* & l'autre *b*, ſi j'en ai une 3e égale à la premiere, je l'appellerai auſſi *a*, & une 4e égale à la ſeconde, je l'appellerai *b*, comme cette ſeconde. En multipliant la premiere par ſon égale, j'ai le Quarré de cette premiere. En multipliant la ſeconde par la 3e, égale à la premiere, j'ai un Produit de la premiere & de la ſeconde. En multipliant la premiere par la 4e, j'ai encore un Produit de la premiere par la ſeconde, à qui la 4e eſt égale. Enfin, en multipliant la ſeconde par la 4e, ſon égale, j'ai le Quarré de la ſeconde.

Que l'on compare ce Raiſonnement avec la Formule $a+b \times a+b = aa+2ab+bb$, on verra que toute leur difference conſiſte, en ce que les expreſſions ſont plus abregées d'un côté, & que de l'autre les idées ſont plus développées.

Je conſeille à ceux qui étudieront cette Science, de ne perdre de vûë les choſes que le moins qu'il leur ſera poſſible, & de ne point s'accoûtumer de bonne heure à manier aiſément les Signes, & à s'en rendre l'uſage familier par la routine, en négligeant de penſer aux choſes ſignifiées. On previendra encore par là un très grand

Digitized by Google

inconvenient. C'eſt une verité aujourd'hui des plus univerſellement reconnuës, qu'une grande partie des erreurs où les hommes tombent, viennent de ce qu'ils s'attachent aux mots. Que ſera-ce donc ſi l'on s'affermit dans une habitude ſi dangereuſe & ſi fatale, en cultivant une Science où l'on a accoûtumé de ſe promettre d'acquerir de la penetration, de l'étenduë & de la juſteſſe d'eſprit? Les expreſſions Algebriques ſont rarement équivoques; elles le ſont pourtant quelquefois: & il n'eſt pas ſans exemple que par ces équivoques, elles aïent jetté dans l'erreur; mais dans l'uſage ordinaire de la vie, & dans une grande partie des Sciences, rien n'eſt plus frequent que des termes équivoques, & des erreurs qui en naiſſent; & on a vû de grands Algebriſtes n'y faire pas aſſez d'attention, & donner d'épaiſſes tenebres pour des lumieres, & des erreurs pour des veritez, dans des matieres qui n'appartenoient plus à leur Art.

Un Auteur Anglois.

Un Homme d'eſprit & de travail, pour avoir appliqué ſon Calcul à une matiere qui ne le comportoit pas, & avoir perdu de vûë ſon ſujet, pour s'abandonner uniquement au plaiſir de calculer, a paru à beaucoup de perſonnes plus attentives, s'être d'autant plus trompé, que ſon Calcul a

été pouſſé avec plus de ſubtilité & plus d'exactitude.

„ Ceux qui ont vû un fait, dit-il, & qui „ l'ont examiné autant qu'il étoit neceſſai- „ re, en ſont parfaitement aſſurez. Ceux „ qui l'ont appris immediatement de té- „ moins dignes de foi, approchent beau- „ coup de la certitude des premiers. Ceux „ qui s'en inſtruiſent par le moïen de ceux- „ ci pourront encore avoir de la certitu- „ de, mais dans un degré moins vif. Des „ Diſciples de ces derniers n'auront pas „ tout-à-fait la même certitude que leur „ Maître. Après avoir poſé ces principes, „ on imagine une Progreſſion de certitude, „ qui, ſans degenerer en doute, vont pour- „ tant en décroiſſant, de generation en ge- „ neration. Quand eſt-ce que la Progreſ- „ ſion ceſſera de donner de l'aſſurance? „ On calcule, on croit l'avoir trouvé; alors „ les tenebres ſuccederont à la lumiere, il „ n'y aura plus de Foi en Terre; il ſera „ donc inutile de conſerver le Genre hu- „ main, & il ne naîtra plus d'Elûs & d'Hom- „ mes à ſe ſauver, & la fin du Monde „ viendra.

Ainſi ce jour ignoré des Anges, ignoré du Fils de l'homme, & dont le Souverain Maître de l'Univers s'étoit reſervé la connoiſſance, ſe découvre par la doctrine des

Digitized by Google

Progreſſions, ſon obſcurité cede à la force du Calcul, il faut qu'il en faſſe la concluſion. Cependant ſi des raiſons ſolides prouvent dans le troiſiéme Siecle, que les témoins qui ont dépoſé dans le premier ſont dignes de foi, & que les Livres qui portent leur nom ſont bien d'eux, ces mêmes raiſons ſolides pour le troiſiéme Siecle, le feront pour le cinquiéme, pour le dixiéme; & le même concours de circonſtances qui met ces témoins & leurs Ouvrages au-deſſus du ſoupçon de fraude deux Siecles après leur mort, ne perd rien de ſa force dix, vingt & trente Siecles après. Un défaut d'attention ſur la matiere & ſur la nature des choſes, a aſſujeti aux ſubtilitez d'une Progreſſion décroiſſante ce qui n'en dépend abſolument point.

En ſuivant la Méthode que je recommande, on ira moins vîte, mais on en tirera beaucoup plus de fruit. On voit beaucoup de gens qui comptent leurs progrès par le peu de temps qu'ils mettent à arriver, depuis le commencement d'un Livre à la fin. C'eſt ce qui a mis en réputation les Abregez; on s'eſt piqué d'en donner dans toutes les Sciences : on en a donné en Algebre d'excellens en leur genre, & je ſouhaiterois que mon Ouvrage eût autant de merite dans le ſien. Mais il m'a

Digitized by Google

paru que dans quelques Abregez, il manquoit des choſes eſſentielles : il m'a paru auſſi que des Theories neceſſaires, des Regles très-utiles n'y étoient pas expoſées dans leur juſte étenduë, & laiſſoient trop à deviner. Si je me croïois capable de donner un Ouvrage ſans défaut, on auroit droit de me regarder comme viſionnaire. Mais, après cet aveu ſincere, je crois auſſi être en droit de dire, que tout Auteur eſt obligé de rendre ce qu'il compoſe le moins défectueux qu'il lui eſt poſſible. Cette perfection à laquelle un Auteur doit tâcher d'atteindre, conſiſte dans le rapport de ſon Ouvrage avec le but auquel il le deſtine : c'eſt ce but qu'il ne faut jamais perdre de vûë, & dont on doit s'approcher autant que l'on peut. Les Elemens d'Algebre ſont deſtinez à ceux qui entreprennent l'étude de cette Science; & en les écrivant, on doit être continuellement occupé du ſoin de la leur faciliter. Dans ce deſſein, j'ai plûtôt conſulté des Ecoliers que des Sçavans : je me ſuis rendu attentif à leurs difficultez ; je me ſuis appliqué à deviner ce qui les arrêtoit & ce qui les embarraſſoit, & c'eſt ſouvent ſur les lumieres qu'ils me faiſoient naître, que j'ai compoſé cet Ouvrage.

Les Commençans ſe noïent, pour ainſi dire, dans des Cours fort étendus ; cette

Digitized by Google

grande multitude de veritez, par où on les fait paſſer, les embroüille, & quand ils ſont arrivez à la fin, s'ils n'ont pas oublié le commencement, dont on ſe rafraîchit ſans ceſſe la memoire, ils ont oublié une partie de ce qui ſuit de près le commencement. J'ai donc crû devoir éviter la multitude des Exemples & la multitude des Cas approchans. Je n'ai point mêlé la Theorie ou la Pratique de l'Arithmetique parmi celle de l'Algebre. J'ai ſuppoſé qu'on ſçavoit ce que j'en ai écrit dans mon Petit Cours d'Arithmetique. Je n'ai rien donné ſur les Combinaiſons; cette matiere n'eſt pas proprement Algebrique: l'Arithmetique y ſuffit; c'eſt un Traité à part. Si je paroît m'étendre beaucoup ſur les premieres Regles, on verra aiſément que je ne m'etens que pour abreger & pour gagner du temps: moins on ſuppoſe de choſes, plus on a ſoin de développer ſa penſée, moins auſſi on arrête ſon Lecteur, quand c'eſt un Lecteur neuf dans ces matieres, & qui cherche à s'en inſtruire, comme ſont ceux pour qui j'écris. J'ai tâché de ne rien laiſſer à deviner ſur la compoſition & la reſolution des Puiſſances. Je me ſuis appliqué à rendre complete la Theorie des Proportions, ſoit Arithmetiques, ſoit Geometriques. J'ai eſſaïé de dégager de ſon

Digitized by Google

obſcurité l'idée des Incommenſurables, & j'ai établi mes Regles ſur cette idée développée.

C'eſt dans les Equations ſur tout qu'il m'a paru qu'on ſuppoſoit trop : je les ai donc fait naître l'une après l'autre de leurs Racines combinées dans tous les cas poſſibles, après quoi leurs Reſolutions n'ont rien d'obſcur ni de paradoxe. J'ai renvoïé à la fin les Equations du 4e Degré, auxquelles on vient très-rarement.

Avant que d'y amener mon Lecteur, déja aſſez fatigué par celles du ſecond & du troiſiéme Degré, & par leurs dépendances, j'ai voulu le délaſſer par les varietez que l'Analyſe preſente : j'ai vû qu'on en donnoit beaucoup de Regles qui m'ont paru ſe réduire à un petit nombre. Le grand point eſt d'en rendre l'uſage familier, & de faire comprendre que la ſolution des Problêmes roule toute entiere ſur la Combinaiſon de ce peu de Regles, differemment appliquées, ſuivant que la matiere le demande, & que les Rapports du Connu à l'Inconnu l'exigent & y invitent comme d'eux mêmes, & c'eſt à quoi je me ſuis étudié. J'ai au reſte tâché d'obſerver un milieu entre le trop & le trop peu d'exemples, & j'ai eu ſoin de les varier.

Je pourrois ajoûter pluſieurs Reflexions pour

Digitized by Google

pour juſtifier ma Methode, & rendre raiſon de ce que j'ai étendu, de ce que j'ai abregé, de ce que j'ai laiſſé; mais, pour convenir de la juſteſſe de ces Raiſons, il faudroit les comparer avec les endroits qu'elles regardent, & ceux qui le pourroient faire & qui ſçavent déja l'Algebre, ne s'amuſent gueres à en lire de nouveaux Elemens. Ceux qui ne la ſçavent pas encore ne comprendroient rien dans cette partie de ma Preface, qui doit être toute pour eux, auſſi-bien que le Livre même. Je finirai donc par un Avis qui me paroît le plus important de tous. L'Algebre roule ſur des idées neuves, & ſur des Signes qui lui ſont particuliers. A l'exception de quelques nouvelles Geometries & de quelques morceaux de Phyſique, on ne lit rien qui ramene à ces idées. Le commerce du monde, & les choſes ſur leſquelles roule l'uſage de la vie, ne les rappellent point; de ſorte qu'on n'eſt aidé d'aucun ſecours pour ſe les rendre familieres; il faut pourtant qu'elles le deviennent, ſans quoi elles ſeront inutiles. Pour cet effet, il me paroît très-neceſſaire d'en apprendre peu à la fois, & de bien repaſſer ce qu'on a appris, avant que de paſſer outre. On ne ſe retarde point par là; au contraire on gagne du temps, & on s'épargne le

Digitized by Google

chagrin de tout recommencer, & l'ennui de revenir ſur tous les pas que l'on a fait & que l'on avoit oubliez. Il ne faut donc pas s'abandonner à cette étude ; on ne ſçauroit mieux faire que d'y en joindre quelqu'autre, pour moderer une impatience dont on tireroit peu de fruits.

On tirera un ſecond avantage de ce mêlange qui me paroît ſi convenable, c'eſt qu'on évitera de ſe prevenir, comme il arrive à quelques-uns, qui regardent cette Science & ſes ſuites, comme les ſeules dignes de porter le nom de Science. Rien ne s'oppoſe plus à l'eloge raiſonnable, que l'entêtement. Celui qui ne connoît bien qu'une choſe, & qui n'aime qu'elle, ſe trompe ſouvent dans le jugement qu'il porte ſur les autres, & il n'y en a point à qui il ne conteſte une partie de leur prix. On voit des gens, qui, pour s'être abandonnez tout entiers à une Science, regardent ceux qui ont reüſſi dans d'autres, & dont on louë les talens, comme des gens qui leur dérobent une partie d'une gloire qu'ils ſe croïent toute dûë. Après s'être extrêmement applaudis dans les ſeules choſes qu'ils ſçavent, ils viennent même à s'applaudir d'ignorer les autres. Tout ce à quoi il ne leur eſt pas aiſé d'atteindre, ils ne peuvent ſouffrir qu'on le mette au

Digitized by Google

nombre des choſes eſtimables. Ce n'eſt pas là tout le mal. Quand l'eſprit humain ne s'occupe que d'un ſeul ſujet, il borne tellement ſes lumieres & ſa capacite, il emouſſe tellement ſa penetration, qu'il n'acquiert pas, ſur le ſujet même dont il s'occupe tout entier, la même étenduë de connoiſſance qu'il ſe procureroit, s'il s'étoit donné plus de force & de fecondité par quelque varieté d'étude. Les progrès de ces gens-là n'étant donc point proportionnez à leurs penibles travaux, & au temps qu'ils y donnent, ſe trouvant peu riches en connoiſſances, ils en deviennent avares, & la penſée qu'un autre peut partager la gloire dont ils ne ſe trouvent qu'un petit fonds qui les ſoutienne dans leurs ingrates & laborieuſes recherches, eſt une penſée qui les deſeſpere. L'envie, l'ingratitude, & tout ce que ces ſentimens ont de ſuites odieuſes, devient leur caractere; & où eſt l'homme raiſonnable qui n'aimât mieux paſſer ſes jours dans l'ignorance, que de devenir ſçavant à ce prix?

Digitized by Google

TABLE
DES CHAPITRES
Contenus dans ce Volume.

CHAPITRE I. *DEs Grandeurs & de leurs Signes,* page 4
CHAP. II. *De l'Addition.* 11
CHAP. III. *De la Souſtraction.* 14
CHAP. IV. *De la Multiplication.* 24
CHAP. V. *De la Diviſion.* 41
CHAP. VI. *Des Quarrez.* 66
CHAP. VII. *Des Cubes.* 84
CHAP. VIII. *Formation des autres Puiſſances.* 97
CHAP. IX. *Des Rapports & des Proportions.* 112
CHAP. X. *Des Progreſſions Arithmetiques.* 115
CHAP. XI. *Proportion Geometrique.* 142
CHAP. XII. *Des Progreſſions Geometriques.* 157
CHAP. XIII. *Des Raiſons Compoſées.* 175
CHAP. XIV. *Des Fractions.* 193
CHAP. XV. *Des Incommenſurables.* 222
CHAP. XVI. *Des Racines Compoſées.* 264
CHAP. XVII. *Diviſion des Racines Compoſées.* 269

Digitized by Google

CHAP. XVIII. *Des Racines Universelles.* 283
CHAP. XIX. *De l'Extraction de la Racine Quarrée d'un Binome.* 298
CHAP. XX. *Theorêmes qui dépendent de la formation des Puissances.* 311
CHAP. XXI. *Des Equations du second Degré.* 317
CHAP. XXII. *Des Equations du troisiéme Degré.* 344
CHAP. XXIII. *Des Racines Imaginaires.* 383
CHAP. XXIV. *Des Equations du quatriéme Degré.* 392
CHAP. XXV. *De l'Analyse.* 424

Fin de la Table des Chapitres.

Digitized by Google

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, ce *Traité de l'Algebre.* Le merite connu de l'Auteur, annonce celui de l'Ouvrage, & j'ai cru que la nouvelle Edition qu'on en veut donner ici pouvoit être utile au Public. Fait à Paris le 15 Juillet 1726. SAURIN.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS par la grace de Dieu Roi de France & de Navarre : A nos amez & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes Ordinaire de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, Salut. Notre bien-amé FRANÇOIS MONTALANT Imprimeur-Libraire à Paris, Nous aïant fait ſupplier de lui accorder nos Lettres de Permiſſion pour l'Impreſſion d'un *Traité de l'Algebre par De Crouzas*, offrant pour cet effet de l'imprimer ou faire imprimer en bon papier & beaux caracteres, ſuivant la feüille imprimée ci-attachée pour modele ſous le Contre-ſcel des Preſentes : Nous lui avons permis & permettons par ces Preſentes d'imprimer ou faire imprimer ledit Traité, en un ou pluſieurs volumes, conjointement ou ſeparément, & autant de fois que bon lui ſemblera, ſur papier & beaux caracteres, conformes à ladite feüille imprimée &

Digitized by Google

attachée ſous notre Contre-ſcel ; & de le vendre, faire vendee & debiter par tout notre Roïaume, pendant le temps de trois années conſecutives, à compter du jour de la date deſdites Preſentes. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres Perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion Etrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance : A la charge que ces Preſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion de ce Livre ſera faite dans notre Roïaume & non ailleurs, & que l'Impetrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 : Et qu'avant que de l'expoſer en vente le Manuſcrit ou Imprimé qui aura ſervi de Copie à l'impreſſion dudit Livre, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Fleuriau d'Armenonville, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en ſera mis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Fleuriau d'Armenonville, Commandeur de nos Ordres : le tout à peine de nullité des Preſentes ; du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Expoſant ou ſes aïans cauſe pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons qu'à la Copie deſdites Preſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, foi ſoit ajoûtée comme à l'Origi-

Digitized by Google

nal. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & neceſſaires, ſans demander autre Permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Paris le dix-ſeptiéme jour du mois d'Août, l'an de Grace mil ſept cens vingt-ſix, & de notre Regne le onziéme. Signé, Par le Roi en ſon Conſeil, NOBLET. Et ſcelé.

Regiſtré ſur le Regiſtre VI. de la Chambre Roïale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 471. fol. 374. conformément aux anciens Reglemens, confirmez par celui du 28 Février 1723. A Paris le vingt-deux Août mil ſept cens vingt-ſix. Signé, D. MARIETTE, *Syndic.*

TRAITE'

Digitized by Google

TRAITE'
DE
L'ALGEBRE.

LE nom d'Algebre vient des Arabes, & ils nomment cette ſcience Alg-Jabr. W'almukábala, qui, dans leur langage, ſignifie l'Art de rétablir & de comparer ; ce qui s'execute par une Analyſe qui aboutit à des Equations.

Dans l'Arithmetique commune on rétablit, on compare ; mais dans l'Algebre on le fait avec une toute autre étenduë. Au lieu que dans l'Arithmetique tous les nombres qu'on employe ſont déterminés, on ſe ſert dans l'Algebre d'expreſſions generales, de ſignes univerſels, & on calcule même ce qu'on ne connoît pas encore, & ce qu'on ne ſçauroit exprimer par aucun nombre déterminé.

L'Addition, la Multiplication, & la formation des puiſſances appartient à la *Synthéſe* ou à la Compoſition ; l'*Analyſe* eſt pour la reſolution.

Digitized by Google

Dans l'*Analyſe* on ſuppoſe vrai ce qui eſt en queſtion, & par les conſéquences que l'on tire de cette ſuppoſition, on arrive enfin, en remontant de degré en degré, à des principes évidens, qui ſervent à établir ce que l'on avoit dabord ſuppoſé. Mais dans la *Synthéſe* on ſe ſert de principes déja reconnus vrais pour deſcendre, de conſéquences en conſéquences, à l'éclairciſſement de la Queſtion.

De Savans Hommes croient que les Anciens Mathématiciens Grecs n'ont pas ignoré l'Analyſe, quoiqu'ils ne l'aient pas publiée; c'étoit un ſecret, diſent-ils, qu'ils ſe reſervoient; & les découvertes qu'ils faiſoient par ſon moien, ils les démontroient par des voies plus détournées : ſemblables en cela à ces Artiſans, qui nous expoſent bien le déhors de leurs Machines, mais en cachent l'intérieur, par avarice, ou par envie & par vanité.

Entre les Grecs Diophante qui, ſuivant les uns, fleuriſſoit ſur le milieu du ſecond ſiécle, & ſuivant les autres ſur le milieu du quatriéme, avoit écrit aſſez au long ſur l'Algebre.

Il y a plus d'apparence que les Arabes ont apris l'Algebre des Indiens, que non pas des Grecs; car dans ce qu'ils ont tiré des Grecs, on voit que les termes dans leſquels ils s'expriment, tirent leur origine du Grec, comme eſt celui par exemple d'*Algorithme*.

Il y a toute apparence que les Grecs avoient apris des Orientaux à ſe ſervir des Lettres de l'Alphabet, pour marquer les nombres; car comme ils manquoient de la Lettre *Vau*, qui répond à nôtre *v* conſone, & qui vaut *ſix* chez les Hebreux, ils lui avoient ſubſtitué la Lettre *S*, afin

Digitized by Google

que du reſte le même ordre fût ſuivi chez eux que chez les Hebreux.

La figure des anciens nombres Arabes n'étoit pas la même dont nous nous ſervons aujourd'hui; car comme la forme des lettres change avec le tems, celle des chifres a auſſi changé. Voici l'état où elle étoit du tems de Planude, Autheur Grec qui vivoit au quatorziéme ſiécle, ι μ ω ϡ ϟ υ v ϳ q.

Ceux qui aiment les recherches de cette nature, ont fait là-deſſus diverſes conjectures, qui me paroiſſent peu ſures.

Dès qu'on s'aviſa de quitter les lettres pour exprimer les nombres, il fut très-naturel de marquer l'unité par une petite ligne perpendiculaire.

Deux lignes en ſituation contraire & paralleles l'une à l'autre, marquerent le nombre binaire.

On eut par là 1 = ≡.

On lia ces dernieres lignes & l'on eut 1 2 3.

Le quatriéme chifre renfermoit quatre lignes † qu'on lia ainſi 4.

Pour le cinquiéme on mit une ligne horiſontale au-deſſus d'un demi cercle 5.

Le VIe. fut compoſé d'un cercle & d'une queuë par en haut 6. Le VIIe. d'une petite ligne & d'une longue, ou d'une petite avec une queuë 7 ou 7. Le VIIIe. eût deux cercles 8. Le IX. fut le VI. renverſé 9.

Le mot de chifre tire ſon origine d'un mot Arabe qui ſignifie être vuide, & dabord n'étoit que le nom du zero.

Le Savant Wallis, de qui nous avons tiré ces obſervations hiſtoriques, eſtime que les chifres Arabiques, & leur maniére de compter, n'étoient pas inconnuës aux Chrêtiens ſur la fin du dixiéme ſiécle, puiſqu'un *Gerbert*, qui enſuite a été

Pape ſous le nom de *Silveſtre Second*, étoit habile dans l'Algorithme ; c'eſt-à-dire dans l'Arithmetique des Arabes.

Quoique les anciens Grecs & Latins ne connuſſent point les chifres Arabes, & ne diſpoſaſſent point dans le même ordre leurs Caracteres numeraux, ils ne laiſſoient pas de diſtribuer, de même que nous, les nombres en dixaines, centaines, milles, milliers ou dixaines de milles : Leurs calculs aboutiſſoient donc aux mêmes ſommes que les nôtres, mais ils y parvenoient par des routes beaucoup plus longues & beaucoup plus difficiles.

Nous comptons unité, dixaine, centaine, puis mille, dixaine de mille, centaine de mille, ainſi conſécutivement de trois places en trois places : mais les Anciens alloient d'abord juſques aux milles, puis de là ils continuoient juſques aux milles de milles, ce qui revient à nôtre million, & les centaines de millions formoient ce qu'ils appelloient la premiere claſſe.

CHAPITRE PREMIER.

Des Grandeurs & de leurs ſignes.

Quantité. 1. ON appelle *Quantité* tout ce qui eſt capable du plus ou du moins.

Rapport. 2. On connoît exactement le rapport d'une Quantité ou d'une Grandeur à une autre, lorſque l'on ſait préciſément combien de fois l'une eſt contenuë dans l'autre, ou de combien l'une ſurpaſſe l'autre.

Signes des 3. On exprime ordinairement les *Grandeurs*

connuës par des *Nombres*, c'eſt-à dire que l'on déſigne leur valeur par des chifres : mais quelquefois, & dans l'Algebre preſque toûjours, on exprime les Grandeurs par d'autres ſignes, & l'on donne à chacune le nom d'une *Lettre*. Grandeurs.

4. On ſe ſert de cette Méthode 1°. pour abreger ; car deux ou pluſieurs lettres ſont auſſi-tôt calculées, lors même qu'elles tiennent la place d'un nombre très-grand, que ſi elles n'en valoient qu'un très-petit, 2°. Lorſque les Grandeurs ſont exprimées par des Lettres, les Concluſions que l'on tire par le calcul, ſont plus Univerſelles, parce qu'une Lettre peut également s'appliquer à une infinité de nombre. 3°. Souvent les Grandeurs que l'on compare enſemble, & dont on cherche, à force de calcul, à découvrir les rapports ; ſouvent, dis-je, ces Grandeurs ne ſont pas aſſez connuës pour marquer leur valeur par des chifres. Uſage des Lettres.

5. L'on appelle donc les Grandeurs propoſées à calculer, *a*, *b*, *c*, &c. Quand une lettre déſigne une Grandeur qu'il faut éloigner, c'eſt-à-dire retrancher & ſouſtraire, l'on fait préceder la Lettre, qui eſt le nom de cette grandeur, du ſigne —, & cela s'appelle *Grandeur Négative*, c'eſt-à-dire *Négation* ou éloignement de Grandeur : mais une Lettre qui marque la *poſition* d'une Grandeur eſt précedée du ſigne +. Diviſion des Grandeurs.

Comme un éloignement peut être plus ou moins grand, l'éloignement d'une Quantité eſt lui-même une Quantité, & peut être traité comme tel, puiſqu'il eſt ſuſceptible du plus & du moins.

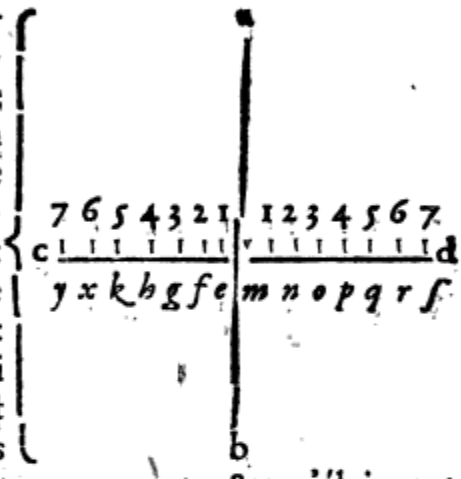
6. Il y a bien de la difference entre nier ſimplement une Quantité, & entre marquer cette Quantité précedée du ſigne — ; car nier ſimplement deux, nier trois, ou ce qui eſt la même Idée du + & du —.

Digitized by Google

choſe ôter 2, ôter 3, c'eſt ſe réduire à o : mais écrire — 2, — 3, c'eſt deſcendre au-deſſous de o, de 2 dans le premier cas, & de 3 dans le ſecond.

Si l'on ôte deux piſtoles à celui qui en avoit deux il ne lui reſte rien ; mais dire qu'il a — 2 piſtoles, c'eſt poſer qu'il en doit 2, & que ſon état eſt inferieur de 2 piſtoles à l'état de celui qui n'a rien.

Concevez une ligne droite *a b*, traverſée par la ligne droite *c d*, qui s'en écarte à la droite vers *d*, & à la gauche vers *c* ; le Point où ces deux lignes ſe croiſent n'appartient ni à la droite, ni à la gauche, il eſt o par rapport à ces 2 termes. Les points *m*, *n*, *o*, *p*, &c. s'éloignent de *zero* du côté de la droite, & leurs éloignemens ſont marquez par + 1, + 2, + 3, &c. Les points *e*, *f*, *g*, *h*, s'éloignent de *zero* du côté de la gauche, & leurs éloignemens ſont marquez par — 1, — 2, — 3, &c. Le ſigne — exprime donc tout le contraire du ſigne +, & cette maniére d'écrire indique qu'il eſt arrivé aux points *e*, *f*, *g*, tout le contraire de ce qui eſt arrivé aux points *m*, *n*, *o*, &c..



Ce qui eſt au-deſſus du point de l'interſection *v*, c'eſt-à-dire toutes les parties de *v a* je les marquerai par des +, & ce qui eſt au-deſſous je le marquerai par des —.

Digitized by Google

Ces expreſſions ſont donc de certaines manieres de parler, dont la ſuite fera voir l'uſage & la commodité; & au lieu de dire 2 *de dettes*, l'on dit — 2 *ſavoir de biens*; au lieu de dire avancé de 5 à la gauche, l'on dit — 5, c'eſt-à-dire eloigné de 5 de la droite.

J'ai remarqué que ce qui trouble les Commençans, & embaraſſe même ceux qui ſont un peu avancez, c'eſt l'idée imparfaite qu'ils ſe forment d'abord des ſignes — & +. Ils regardent d'abord le + comme une ſimple marque d'Addition, & le — comme ſimple marque de Retranchement ou de Souſtraction; mais cette idée eſt imparfaite. Le + & le — ſont des ſignes contraires, de telle maniére que le — n'exprime pas ſeulement l'abſence du +, car en ce cas il ne vaudroit que o, mais il indique qu'on va au-deſſous d'un certain terme autant que le + iroit au-deſſus, que par exemple l'on charge de dettes autant que l'on donneroit de bien ſi le ſigne étoit poſitif : Que l'on va à la gauche d'autant de meſures que l'on en marqueroit à la droite, ſi l'on ſe ſervoit du ſigne +. Quand je dis — 5 piſtoles, je ne marque pas ſeulement qu'un Homme n'a pas 5 piſtoles, je ne marque pas ſimplement non plus qu'il n'a aucune piſtole; mais je poſe qu'il eſt dans un état tout contraire à celui où il ſeroit s'il en avoit 5, & que par conſequent ſans en avoir aucune il en doit 5.

L'un eſt en droit de ſe ſervir des 5 dont il eſt le maître, & ſon droit je l'appelle + 5. L'autre eſt dans l'obligation de chercher à en acquerir 5 pour l'uſage d'un autre, & dont il ne pourra pas diſpoſer pour lui-même, & ſon obligation je l'appelle — 5.

Les lignes perpendiculaires ſur *A B* croiſſent FIG. I.

Digitized by Google

juſques à la plus grande CD & de là elles décroiſſent. $gh = fe + oh$, $ik = gh + ok$. $DC = ik + oD$, $DC - oD = nv$, $nv - ov = pq$, $pq - oq = tf$.

Les quantitez ov, oq qui ſont ſous le ſigne — ne laiſſent pas d'être autant poſitives que les quantitez oh, ok qui ſont ſous le ſigne +, & la même oD eſt une fois ſous le ſigne + & une fois ſous le ſigne —.

Ces Signes marquent diverſitez de rapports, & des Quantitez d'une nature differente, à moins que le Rapport même ne vint à influer ſur la nature des Quantitez.

Ordinairement une Lettre qui n'eſt précedée d'aucun ſigne marque une Quantité poſitive, & a la même valeur que ſi elle étoit précedée du ſigne +: mais quelquefois une Lettre eſt emploïée pour marquer une Quantité négative, c'eſt-à-dire un abaiſſement au-deſſous de o, dans ces cas là le ſigne + mis devant une telle Lettre la laiſſe négative, & au contraire le ſigne — la rend poſitive. Par exemple, ſi $3a$ déſignent une dette, $2b$ une autre, quand je dis il doit $2b + 3a$ le + que je mets devant $3a$ le laiſſe négatif: mais ſi j'avois dit, il doit $2b - 3a$ le ſigne — mis devant $3a$ marqueroit que je change la nature négative de $3a$ en une toute contraire, de ſorte que par là même que $3a$ eſt négatif $-3a$ eſt poſitif.

A parler exactement le mot de *Grandeur* ne ſe dit pas d'une choſe conſiderée en elle-même; deux choſes reçoivent ce nom dès qu'on les compare.

Si l'on conçoit un certain terme duquel deux choſes s'éloignent en differens ſens, la quantité des

éloignemens de l'un ſe marquera par des + & la quantité des éloignemens de l'autre par des —. Ces éloignemens ſeront auſſi réels l'un que l'autre, & voilà pourquoi il eſt indifferent quel des deux prendre pour le placer ſous le ſigne +; mais dès qu'on a appliqué ce ſigne à l'un, c'eſt une neceſſité d'exprimer l'autre ſous le ſigne contraire.

Une boule roule de *V* vers *d* ſes progrez vers ce terme ſe marquent par des +. On retire la planche, qui la ſoutient, de *v* vers *c* & par ce mouvement la boule eſt portée à la gauche, les progrez qu'elle y fera ſe marqueront par des — ce ſera autant de moins avancez vers la droite.

Si le mouvement propre eſt + 6 & le commun — 6 la boule ſe trouve toûjours vis-à-vis de *a* & de *b*. Si le mouvement propre eſt + 5 le commun — 3 la boule ſe trouvera de deux meſures à la droite de *a b*.

Si le mouvement propre eſt + 4 & le commun — 7 la boule ſe trouvera de 3 meſures à la gauche de la ligne *a b*.

Quand, dans de certaines occaſions, on regarderoit les Lettres précedées du ſigne —, comme des expreſſions de ce qui n'eſt point & qui ne peut être, les calculs & les raiſonnemens, où ces ſignes & ces expreſſions entreroient, ne laiſſeroient pas d'avoir leur juſteſſe & leur verité *hypothetique*, comme quand je dis ſi 8 eſt égal à dix, quatre ſera égal à cinq.

Après avoir été amené à des concluſions fauſſes en elles-mêmes, par une certaine partie d'un calcul, on peut, par une autre, corriger l'erreur & par cette correction parvenir à la verité, à peu près comme dans la Regle de Proportion. Quand pour avoir le quatriéme terme proportionnel, je

Digitized by Google

multiplie d'abord le 3 terme par le ſecond, je m'éloigne du terme que je cherche, mais diviſant ce produit par le premier terme, je corrige mon erreur ſi exactement que j'arrive à ce que je cherche.

Il ſe peut que les premiers Autheurs de l'Algebre n'aïent ſenti que confuſément les principes ſur leſquels étoient fondé l'uſage du ſigne —, ou que déja, dans l'injuſte goût de ceux qui les ont ſuivis, pour ſe faire plus admirer, ils n'aïent publié leur Art qu'obſcurément. Il ſe peut auſſi que d'abord ils n'aïent appliqué le ſigne — qu'à des cas où il convenoit viſiblement, & que leur aïant enſuite réüſſi dans d'autres, quoiqu'il y répandît beaucoup d'obſcurité, ils ſe ſoient faits une Loi de s'en ſervir en toute occaſion. Après quoi le ſuccès leur a tenu lieu de preuve.

Quand on calcule les mouvemens des Boules à Reſſort qui ſe choquent, on déſigne d'abord la quantité de chacune par des +. Enſuite il ſe trouve ſouvent qu'après les efforts reciproques de l'une contre l'autre, le mouvement de l'une ſe trouve exprimé ſous le ſigne —, & c'eſt un mouvement réel, mais de rebrouſſement & d'une détermination oppoſée à la précedente.

Il en eſt de même dans l'Optique. La diſtance du foïer qu'on appelle réel ſe trouve en calculant ſous le ſigne +. Cette diſtance regle le plus ou le moins de convergence des Raïons, c'eſt-à-dire la quantité de leur approche.

La diſtance du foïer *virtuel* ſe trouve en calculant, ſous le ſigne —, & ce qui eſt ſous ce ſigne regle la quantité de la divergence des Raïons, détermination tout autant réelle que celle de convergence.

Digitized by Google

Le plus & le moins marquent donc en eux-mêmes contrarietés ou progrès vers des termes opposés, & c'eſt la nature du ſujet ſur lequel ces ſignes roulent qui en rend quelquefois l'un purement négatif.

Clavius finit ſon VII. Chapitre en diſant : *Debilitas ingenii humani accuſanda, quod capere non poteſt, quò pacto id verum eſſe poſſit. Neque enim de ratione pradicta multiplicationis dubitandum eſt, cùm illa, per multa exempla, ſit confirmata.*

Grandeur Complexe.

Lorſque l'on joint enſemble pluſieurs quantités par les ſignes + ou —, la ſomme compoſée de ces quantités pluſieurs en nombre, ſoit qu'elles ſe trouvent toutes poſitives, ſoit que les poſitives ſoient accompagnées de négatives, ſoit qu'il n'y ait que des négations, cette ſomme, dis-je, & ces aſſemblages eſt appellée une Grandeur *Complexe :* Ainſi $b + c + d$ forment une grandeur complexe, de même que $b - c + d$ & encore $-b - c - d$. Mais $b\ c\ d$ eſt une grandeur *incomplexe*, parce que les 3 quantités qui la compoſent ne ſont pas aſſemblées par les ſignes + & —.

CHAPITRE II.

De l'Addition.

Premier cas.

1. LOrſque la même Grandeur doit s'ajoûter pluſieurs fois, on met au-devant de la lettre qui l'exprime, un chifre qui vaille autant d'unitez que l'on ajoûte de fois cette lettre, par exemple je veux ajoûter b, 3 fois, j'écris $3\ b$.

Second.

2. Quand on doit ajoûter des quantités expri-

— joint avec — donne —.

5. Mais quand on joint le — avec le +, le + ſe trouve diminué de la quantité du —, c'eſt-à-dire qu'il ſe trouve diminué de la même quantité dont le — baiſſe au-deſſous de 0.

6. Si la quantité qui eſt ſous le ſigne — ſe trouve moindre que la quantité qui eſt ſous le ſigne +, on retranchera la plus petite de la plus grande & le reſte ſe marquera ſous le +.

+ 5 *c* — 3 *c* joints en une ſomme font + 2 *c*.

7. Mais ſi la quantité qui eſt ſous le ſigne — ſurpaſſe celle qui eſt ſous le ſigne +, on ôtera encore la petite de la plus grande, mais le reſte ſe marquera ſous le ſigne —. + 7 *c* — 10 *c* joints en une ſomme font — 3 *c*.

8. En un mot, quand les ſignes des deux quantités que l'on veut ajoûter ou joindre en une ſont differens, on ôte la petite de la plus grande, & le reſte ſe marque ſous le ſigne de la plus grande. Regle Sommaire.

Il n'importe que la plus grande ſoit dans le ſigne d'en haut, ou dans le ſigne d'en bas.

9. Suppoſons qu'un homme ait exactement annoté jour par jour tous ſes gains & toutes ſes pertes, ſi au bout de l'an il veut ſavoir s'il eſt en perte ou en gain, il peut ſommer d'un côté tous ſes gains & d'un autre toutes ſes pertes, & en comparant ces ſommes ainſi aſſemblées en gros, il verra d'abord s'il eſt en gain ou en perte; mais pour ſavoir exactement juſqu'où va ſon gain ou ſa perte, il ſouſtraira la petite ſomme de la grande, & le reſidu marquera exactement ſon gain ou ſa perte, ſuivant que la plus grande ſomme eſt celle des gains ou des pertes. Eclairciſſement.

Mais ſi, ſans avoir fait deux livres, l'un pour

les gains & l'autre pour les pertes, ou ſans avoir écrit dans le même livre, à la droite les gains & à la gauche les pertes, il a marqué tout de ſuite les gains ſous le ſigne + & les pertes ſous le ſigne —, il n'aura qu'à ſommer chaque page par l'addition, & ce qui ſe trouvera marqué au bas indiquera exactement ſon gain ou ſa perte, ſuivant le ſigne ſous lequel il ſera écrit; & pour avoir le gain total ou la perte totale, il n'aura qu'à ſommer de cette maniére là le bas de toutes les pages, s'il y a plus de gains que de pertes, les + ſurpaſſeront les — & la ſomme ſera ſous le ſigne +: ſi les — ſurpaſſent les +, c'eſt-à-dire ſi les quantités marquées ſous le ſigne — montent plus haut que les quantités marquées ſous le ſigne +, la ſomme des grains & des pertes aura le ſigne —.

CHAPITRE III.

De la Souſtraction.

Parties d'une Souſtraction.

1. DAns toute Souſtraction il y a trois Sommes, la Premiére qu'on appelle *Superieure*, la Seconde que j'appelle *Inferieure*, & la Troiſiéme qui exprime leur *Difference*, & marque combien l'une eſt éloignée de l'autre.

Premier cas.

2. Lorſque la Quantité Superieure & l'Inferieure ſont exprimées par la même lettre, les mêmes nombres & les mêmes ſignes, puiſqu'elles ſont égales, la difference ſe réduit à rien, & on ne la marque pas.

Si de a l'on ôte a reſte 0, ſi de $3b$ l'on ôte $3b$ reſte 0.

La difference de $-3b$ à $-3b$ eſt auſſi 0.

Digitized by Google

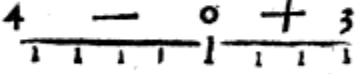
3. Lorſqu'une lettre eſt priſe pluſieurs fois dans la ſomme Superieure, & pluſieurs fois auſſi dans l'Inferieure, mais moins que dans la Superieure, on retranche du chifre qui précede la Superieure celui qui précede l'Inferieure, & le reſte ſe met au-devant de cette lettre dans la troiſiéme ſomme. Seconde.

Si de $5\,b$ l'on ôte $2\,b$ reſtera $3\,b$.

4. Si une lettre eſt priſe moins de fois dans la ſomme Superieure que dans l'Inferieure, & qu'elles ſoient l'une & l'autre ſous le ſigne +, on prend la difference des deux nombres qui précedent cette lettre; & cette difference on la met dans la troiſiéme ſomme, au-devant de cette lettre avec le ſigne —; car de $3\,a$ ſi l'on ôte $4\,a$ il reſtera un a moins que rien : ſi celui qui a $3\,b$ eſt condamné à en païer 5, il doit $5\,b$, il doit donc $2\,b$ au-delà de ſon bien, & cela s'exprime par $-2\,b$. Troiſiéme.

Si de $3\,c$ l'on ôte $7\,c$ reſte $-4\,c$, car $3\,c - 7\,c$ égalent $-4\,c$. Celui qui a 3 & qui doit 7 doit 4 de plus qu'il n'a & ſon état eſt appellé — 4.

Si de 3 Meſures à la droite l'on ôte 7 Meſures, depuis cette troiſiéme Meſure de la droite, l'on ſe jette à la gauche de 7, & par conſéquent on ſe trouvera à la gauche du point milieu, de 4; & 4 à la gauche s'exprime par — 4.



De $+3\,c$
Otez $+7\,c$
Reſte $-4\,c$.

La 3e Somme $-4\,c$ ajoûtée à la ſeconde $+7\,c$, donne juſtement $+3\,c$; c'eſt donc la quantité que l'on cherche, puis qu'ajoûtée à l'Inferieure elle eſt égale à la Superieure.

Digitized by Google

On retranche — 4 d'une ſomme en y ajoûtant + 4. La ſomme de mon bien eſt 15 — 6 ſi j'ai 15 de fonds & que je doive 6.

De cette ſomme 15 — 6 on retranchera la partie — 6, ſi on me donne + 6.

Quand je dis de 5 Toiſes, je veux en ôter 7 Toiſes donc il m'en reſtera — 2 : cela ſignifie qu'il s'en manque 2, que de 5 je puiſſe ôter 7.

Ce ſont là des Rapports énoncés d'une certaine façon.

Quatriéme. 5. Si une grandeur eſt précedée dans la Somme Superieure du ſigne + & dans l'Inferieure du ſigne —, on la met dans la troiſiéme Somme précedée du ſigne +, & d'autant de chifres qui la précedoient, tant dans la Somme Superieure que dans l'Inferieure ; car de 4 *a* ſi l'on n'ôte rien il reſte 4 *a*, ou la difference entre 4 *a* & rien c'eſt 4 *a* : mais la difference entre 4 *a* & ce qui eſt 3 *a* au-deſſous de rien c'eſt 7 *a*. Puiſque la difference croît à proportion que la Somme Superieure eſt grande & l'Inferieure eſt petite.

Afin que la difference croiſſe à proportion que l'Inferieure eſt petite, il faut changer le ſigne — de cette Inferieure en +.

La difference entre 6 & 0 c'eſt 6, mais ſi je veux avoir la difference entre 6 & — 3, puiſque — 3 eſt plus petit que 0 de 3, dans ce ſecond cas la difference croîtra de 3, & ſera 9 au lieu de 6.

De quatre hommes le premier a 5 piſtoles, le ſecond 3 le troiſiéme n'a rien & ne doit rien. Le quatriéme n'a rien non plus, mais il doit 7 piſtoles.

La difference du premier au ſecond eſt 2, au troiſiéme 5 au quatriéme 12 ; car avant que celui-

lui-ci ait 5 piſtoles à lui, il faut qu'il en gagne 12. Il s'en faut donc 12 qu'il n'égale le premier.

On voit déja que — — (moins moins) ſe change en +. Quand de 4, j'ôte — 3, 1°. je poſe 4, 2°. je lui aſſocie — — 3. Si je lui aſſociois — 3, ou + — 3, ce ſeroit addition, & 4 — 3 = 1. Mais au lieu d'aſſocier — 3, ou + — 3, je fais tout le contraire, j'aſſocie — — 3; par conſequent, au lieu de 4 diminué de 3 = 1, j'ai 4 augmenté de 3 = 7.

6. Si une Grandeur eſt précedée dans la Somme Superieure du ſigne —, & dans l'Inferieure du ſigne +, cette Grandeur doit, dans la troiſiéme Somme, paroître autant de fois que dans les deux précedentes, mais toûjours précedée du ſigne —; car ſi de $a - b$ on ôte $c + b$, il eſt viſible que je diminuë la ſomme $a - b$ 1°. de c & 2°. de b & par conſequent il me reſte $a - b - b - c$ c'eſt-à-dire $a - c - 2b$. Cinquiéme.

7. Quand les Grandeurs de la Superieure & de l'Inferieure ſont exprimées par de differentes Lettres, on met dans la Troiſiéme Somme, 1°. Toutes les Grandeurs de la Somme Superieure en gardant leurs ſignes. 2°. Toutes les Grandeurs de la Somme Inferieure, mais précedées du ſigne —, ſi elles avoient eu dans la Somme Inferieure le ſigne +. Ainſi de $a + b$ ſi vous ôtez $c + d$, vous aurez pour difference $a + b - c - d$. Si de $a + b - c$, j'ôte $d + e$ reſtera $a + b - c - d - e$. Sixiéme.

8. Mais ſi quelque Grandeur de la Somme Inferieure eſt marquée du ſigne —, il faudra que, dans la Troiſiéme Somme, elle ſoit précedée par le ſigne +; car pour ôter de $a + b$, $c - d$; comme vous avés d'abord retranché c tout entier, au lieu qu'il falloit ſeulement retrancher $c - d$, le Septiéme.

Digitized by Google

retranchement eſt trop grand de la valeur de d ; il faut donc replacer ce d qu'on avoit retranché de trop.

Avis. 9. Pour ſe rendre familiére la Souſtraction Algebrique, il faut 1°. écrire la Somme de laquelle on veut faire une Souſtraction, 2°. Il faut écrire tout d'une ſuite la Somme que l'on veut ſouſtraire, en changeant, ſuivant les deux Articles précedens, les ſignes — en + & les + en —. 3°. Il faut corriger cette Somme, en la réduiſant à un moins grand nombre de termes par le moïen de l'Addition ; ainſi aïant à ſouſtraire $5a - 2b + 4e - 7c$, de $8a + 3b - 4e + 10c$, j'écris $8a + 3b - 4e + 10c - 5a + 2b - 4e + 7c$. Après quoi je corrige cette Somme & j'ai $3a + 5b - 8e + 17c$ laquelle Somme ajoûtée à $5a - 2b + 4e - 7c$ donne $8a + 3b - 4e + 10c$; ce qui ſert de preuve.

Ce que c'eſt que *corriger*. *Corriger*, c'eſt aſſembler en un deux ſommes qui contiennent les mêmes Lettres, & on les aſſemble par l'Addition.

Corriger $3a + 2a$, c'eſt écrire $5a$. Corriger $-4a - 3a$, c'eſt écrire $-7a$. Corriger $8a - 5a$, c'eſt écrire $3a$. Corriger $5a - 9a$, c'eſt écrire $-4a$.

Quand donc j'ai $8a + 3b - 4e + 10c - -5a + 2b - 4e + 7c$, 1°. J'écris les Sommes qui contiennent les mêmes lettres l'une ſous l'autre

$$\begin{array}{l} +8a+3b-4e+10c \\ -5a+2b-4e+7c \end{array}$$

2°. J'aſſemble $+3a+5b-8e+17c$.

Obſervation néceſſaire. Il ne faut pas confondre deux expreſſions. La *Premiere*, c'eſt ôter -3 de $+b-7$, auquel cas il reſtera $b-4$, puiſqu'en ôtant -3 de

$b - 7$, je décharge la quantité réelle b de 3 négations. Elle étoit chargée de 7 négations d'unité, je la décharge de 3, elle ne sera donc plus chargée que de 4 & j'aurai $b - 4$, au lieu qu'avant cette décharge & ce retranchement de 3 négations, j'avois $b - 7$. La *Seconde*, c'est diminuer $b - 7$ de 3; car alors c'est joindre la négation de 3 unités à la quantié réelle de b déja diminuée de 7, & par consequent c'est faire $b - 10$.

10. Quand donc je place dans la ligne superieure

$$8a + 3b - 4e + 10c$$

Et dans l'Inferieure $5a - 2b + 4e - 7c$

Et que j'en tire la difference $3a + 5b - 8e + 17c$,

je fais tout d'un coup la Soustraction & la Correction que j'avois fait précedemment en deux repriſes.

Ainsi dans la Soustraction, quand le Nombre Superieur & l'Inferieur ont des Signes contraires, on ajoûte ces deux Nombres, & on met devant leur Somme le Signe du Nombre Superieur. Quand ils ont les mêmes Signes, si le Superieur est le plus grand, on en ôte l'Inferieur, & on ne change point le Signe. Si l'Inferieur est plus grand on en ôte le Superieur & on change le Signe. Regle sommaire.

11. Le mouvement d'une boule se fait de v vers d & se marque par $+$. Le mouvement du plan qui la soûtient se fait de v vers c & se marque par $-$. Le plan avance vers son terme de 8 mesures & la boule vers le sien de 20. Pour savoir combien la boule se trouve éloignée du terme milieu ab, & de quel côté; il faut sommer les deux progrés $+ 20 - 8$, on aura $+ 12$. C'est donc de 12 que la boule se sera éloignée de ab vers la Eclaircissemens. Fig. 2.

droite. J'appellerai ce mouvement le progrés *Total*.

2°. Du Total + 12 ſi j'ôte le Propre + 20, j'aurai le Commun — 8, difference du Total d'avec le Propre.

3°. Si du Total + 12 j'ôte le commun — 8, j'aurai le Propre + 20, difference du Total d'avec le Commun.

Si du Propre + 20, j'ôte le Total + 12 qui eſt du même côté, reſtera + 8 dont le Propre ſurpaſſe le Total du même côté.

Fig. 1. $ef = ts$. Donc $ef = CD - oD - ov - oq$ Donc $ef - CD = - oD - ov - oq$.

Si de + ef, j'ôte + CD, j'aurai $- oD - ov - oq$, & cette difference ajoûtée au terme ſouſtrait + CD, donne pour ſomme $CD - oD - ov - oq = ef$, le terme ſuperieur.

Mais ſi de ef, j'ôtois $CD - oD - ov - oq = tf = ef$, j'aurois $ef - CD + oD + ov + oq$, c'eſt-à-dire $ef - tf = o$.

Et en ajoûtant la difference + $ef - CD + oD + ov + oq$ au nombre ſouſtrait + $CD - oD - ov - oq$, j'ai ef le terme ſuperieur.

Les Commençans ne ſauroient ſe rendre trop familier le fondement des opérations que l'on fait par le moïen des ſignes + & —, & j'ai cru que deux pages de plus, où on répete les mêmes verités, pour les leur rendre plus préſentes, en les donnant ſous diverſes faces, ne paſſeront pas pour ſuperfluës.

Continuation d'éclairciſſemens.

12. Lorſque les deux Quantités ſont ſous le même Signe + & que l'Inferieure, laquelle ſe déduit, eſt plus petite que la Superieure de laquelle on la ſouſtrait, le reſidu ſe marque ſous le Signe +.

Digitized by Google

Lorſque la Quantité Inferieure eſt plus grande que la Superieure, l'on déduit la Superieure de l'Inferieure, & le Reſte ſe marque ſous le Signe —, car celui qui le matin a gagné 3 & le ſoir a perdu 5, ſe trouve en perte de 2, & ainſi en déduiſant ſa perte de ſon gain, il doit annoter — 2.

13. Lorſque les 2 Quantités ſe trouvent ſous le même Signe —, il faut remarquer que déduire ou rabattre le —, c'eſt faire tout le contraire que de rabattre le +: Comme donc en rabattant le +, l'on poſe le —, c'eſt-à-dire l'on poſe d'autant — que l'on rabat de fois +; au contraire rabattre le — ce ſera poſer le +, & rabattre le — du —, c'eſt poſer —, moins qu'on n'auroit fait: de ſorte que le —, duquel ſe fait la déduction, diminuë ſuivant que le — que l'on en tire précede une Quantité plus ou moins haute.

14. Si donc en ce cas la Somme Superieure eſt plus grande, on en ſouſtrait l'Inferieure, & le Reſte ſe marque ſous le —, car pour lors le — eſt diminué de la Somme Inferieure.

15. Mais ſi dans ce même cas la Quantité Superieure eſt plus petite que l'Inferieure, comme retrancher le —, c'eſt poſer le +, & que ce que l'on poſe ſurpaſſe le — avec lequel on le joint, ce qui réſulte de cette union doit ſe marquer ſous le ſigne +; il faut donc en ce cas ôter la Quantité Superieure de l'Inferieure, & écrire le Reſte ſous le ſigne +.

16. Oter une Grandeur d'une autre, c'eſt donc aſſocier cette Grandeur avec l'autre, mais affectée d'un ſigne contraire.

Oter + b de + c, c'eſt aſſocier avec la Quantité + c, la Quantité b poſée ſous le ſigne —.

Oter — *b* de + *c*, ce n'eſt pas joindre — *b* avec + *c*, car ce ſeroit une Addition, c'eſt faire tout le contraire. Or le contraire de — *b*, c'eſt + *b* : Donc ôter — *b* de + *c*, c'eſt aſſocier + *b* avec + *c*.

Faire tout le contraire que de joindre — *b* avec + *c*, ce n'eſt pas ſimplement le faire évanoüir, & poſer + *c* tout ſeul, c'eſt ce qui arriveroit, s'il s'agiſſoit d'ôter zero de + *c* : mais autant que — *b* eſt different de o, autant faut-il qu'il y ait de difference entre retrancher o & retrancher — *b* ; par conſequent autant que — *b* eſt au-deſſous de o, autant ſon retranchement ſera au-deſſus du même o, puiſque le retranchement eſt préciſément contraire à la poſition.

17. Quand les Signes ſont differens, ſi la Quantité Superieure eſt ſous le — & l'Inferieure ſous le +, comme ſouſtraire le +, c'eſt poſer le —, on change le Signe de l'Inferieure, & l'on joint en un les Quantitez Superieure & Inferieure, ſous le même ſigne —. Si de — 3 je n'ôte rien, reſtera toûjours — 3 ; car n'ôter rien de — 3, c'eſt ne toucher rien à — 3 : mais quand on ôte + 2, l'on ôte 2 de plus que ſi l'on n'ôtoit rien, la diminution eſt donc plus grande de 2, & ainſi au lieu de — 3 l'on aura — 5.

18. Mais ſi la Quantité Superieure eſt ſous le Signe +, & l'Inferieure ſous le Signe —, comme ôter —, c'eſt poſer le +, l'on change le Signe de l'Inferieure, & on joint les deux Quantitez en une ſous le Signe + ; car ſi de + 5 je n'ôte rien, il me reſte + 5, ſi j'ôte 2 il ne me reſte que + 3, mais ſi au lieu d'ôter + 2, j'ôte — 2, je fais tout le contraire que ſi j'ôtois + 2, par conſequent je poſe + 2 & au lieu de + 5, j'aurai + 7.

Digitized by Google

19. Un Commis écrit toutes les Sommes qu'il reçoit de ſon Maître ſous le ſigne —, car ce ſont autant de dettes qu'il contracte, & de Sommes dont il ſera obligé de tenir compte : mais toutes les Sommes qu'il livre au nom de ſon Maître, & toutes les dépenſes dont il faut que ſon Maître lui tienne compte, il les écrit ſous le ſigne +, auſſi-bien que le ſalaire de ſes vacations, car ce ſont là des fonds qui lui appartiennent ; ce ſont pour lui des dettes actives à l'égard deſquelles il eſt Créancier de ſon Maître.

Si donc il ſe trouve dans un Article + 20 & dans le ſuivant — 8, cela ſignifie que ſon Maître lui doit 20 & qu'il doit 8 à ſon Maître. En ajoûtant ſon bien & ſes dettes, il aura à cet égard + 12.

Si ſon Maître prend le Livre & efface — 8, il reſtera + 20 au Commis, car effacer — 8, c'eſt faire la même choſe que ſi on mettoit 0.

Si le Maître ne ſe contente pas d'effacer — 8, mais que laiſſant le nombre 8, il change le ſigne — en +, l'union de ces deux articles donnera au Commis 20 + 8 = 28 : Ainſi ſouſtraire le —, c'eſt poſer le + ; car c'eſt plus faire que d'effacer ſimplement le —, autrement ſouſtraire — 8 & ſouſtraire 0, ce ſeroit tout un ; & ainſi ſouſtraire — 8, c'eſt poſer + 8.

En ajoûtant — 8 à + 20, l'on fait + 12, c'eſt-à-dire l'on diminuë 20 de 8, puis donc que la Souſtraction fait tout le contraire de l'Addition en ſouſtraiſant — 8 de + 20, l'on augmente 20 de 8 & l'on a 20 + 8.

20. Ainſi dans la Souſtraction le Signe de la Quantité que l'on ſouſtrait ſe change toûjours, après quoi la Souſtraction devient une Addition. Concluſion & Regle ſommaire.

CHAPITRE IV.

De la Multiplication.

Idée de la Multiplication litterale.

1. PUiſque la Multiplication eſt une Addition réïterée de la même Quantité, multiplier a par 3, c'eſt ajoûter a 3 fois, le multiplier par 5, c'eſt l'ajoûter 5 fois; ainſi $3a$ eſt le produit de a multiplié par 3, & $5a$ eſt le Produit de a multiplié par 5, de ſorte que pour former un Produit, on place le Caractére multipliant devant la Quantité multipliée. Quand donc le Caractére multipliant eſt une Lettre, l'on place cette Lettre devant la Quantité multipliée. Suivant cela, quand je veux multiplier b par c, j'écris cb.

Pour multiplier $c+d$ par $c+e$, l'on opére ainſi

$$\begin{array}{r} c+d \\ \underline{c+e} \\ cc+cd+ec+ed. \end{array}$$

Juſques à ce que des Lettres viennent à pouvoir s'évaluer en chifres, ou à marquer des lignes connuës, le Calcul Algebrique ne preſente rien de diſtinct, & les Lettres ſervent ſeulement à marquer ce que l'on doit faire, & à conduire à un réſultat qui pourra dans la ſuite ſignifier quelque choſe de plus diſtinct.

Cela poſé, quand je dois multiplier a par b, j'exprime que je dois faire cette multiplication par ce ſigne $a \times b$, ou plus briévement par ab.

L'ordre des Lettres ne

2. J'ai prouvé dans mon Arithmetique que $2 \times 3 = 3 \times 2$. D'où il ſuit que $a \times b = b \times a$,

Digitized by Google

ou que c'eſt tout un d'écrire ab ou ba. change point la valeur de la ſomme.

Par cette raiſon $ab \times c = c \times ab$

Puiſque $c \times ba = ba \times c$, & puiſque $ab = ba$. Il ſuit $abc = cab = cba = bac$. Or $ac \times b = b \times ac$. Donc $acb = bac$. $cb \times a = a \times cb$. Donc $cba = acb$, & ac étant $= ca$; $bca = bac$. Donc $abc = cab = cba = bac = acb = bca$.

S'il y a plus de trois lettres, je ferai $abcd = dabc = dcba = cbad$. Puiſque $ad = da$. Donc $dab = bda$ Donc $dabc = bdac$, &c.

On void qu'on a une voie ſûre pour démontrer que la ſomme eſt toûjours égale, dans quelque ordre que l'on place les lettres qui l'expriment.

3. aa eſt un indice que l'on a multiplié a par a, bb avertit que l'on a multiplié b par b, abc que l'on a multiplié le produit ab par c ou bc par a ou ac par b. Exemples.

4. aaa ou a^3 indique que l'on a multiplié aa par a, a^7 ſignifie la même choſe que $aaaaaaa$, & que par conſequent a^6 a été multiplié par a, ou a^5 par a^2, ou a^4 par a^3.

5. a^4b^3 marque que a^4 a été multiplié par b^3, ou a^4b par b^4, ou ab^3 par a^3b^2, ou bien $aabbb$ par aab^3.

6. Lorſque l'on a de ſuite pluſieurs Grandeurs dans le Multiplié, on multiplie chacune par le Caractére multipliant. Ainſi $a + b + c$ multiplié par d, donne $ad + bd + cd$. Premier Cas.

7. Lorſque la Somme Multipliante contient auſſi pluſieurs Grandeurs, l'on multiplie toutes les Grandeurs du Multiplié par la premiere du Multipliant, enſuite par la ſeconde, puis par la troiſiéme, &c. Second.

8. $+$ multiplié par $-$ donne $-$, car ſi vous Troiſiéme.

Digitized by Google

multipliez a par $+3$, cela ſignifie que vous l'ajoûtez trois fois. Vous aurez donc $+3a$. Mais ſi vous le multipliez par -3, cela doit ſignifier tout le contraire & par conſequent que vous le retranchez 3 fois. Vous aurez donc $-3a$.

Prenez a une fois ou multipliez-le par l'unité, vous aurez $1a$ ou a. Ne le prenez aucune fois ou multipliez-le par 0, vous n'aurez rien. Prenez-le une fois moins, ce ſera $-1a$. Prenez-le 3 fois moins, ce ſera $-3a$. Prenez-le autant de fois qu'il y a d'unitez en $+b$, vous aurez $+ab$. Faites tout le contraire, retranchez-le autant de fois qu'il ſe manque d'unitez en b, vous aurez $-ab$.

Quatriéme. 9. $-$ multiplié par $+$ donne auſſi $-$; car de la Multiplication, réſulte toûjours un même Produit, pendant que les Racines ſont les mêmes, quelle des deux qui ſoit le Multiplié. Donc ſi $+b \times -a$ donne $-ba = -ab$, $-a \times +b$, donnera le même produit $-ab = -ba$.

Une fois $-a$, c'eſt $-a$, Donc 2 fois $-a$, c'eſt $-2a$ & $-a \times +2 = -2a$.

En effet, quand je multiplie a par b, j'ai cette proportion (je l'ai prouvé dans l'Arithmetique) 1. $a :: b. ab$; ou celle-ci 1. $b :: a. ab$.

Donc quand je multiplie $+a$ par $-b$. J'ai 1. $+a :: +b -ab$, ou 1. $-b :: +a -ab$.

Car dans la *Premiere* Proportion je vai d'abord de Poſitif en Poſitif; & enſuite de la même maniére de Négatif en Négatif, & dans la *Seconde* étant allé du Poſitif au Négatif dans le premier membre, je dois de même aller du Poſitif au Négatif dans le ſecond.

Soit $a = 5$. $b = 2$.

Comme $+5 = +a$ monte par-deſſus l'unité premier terme; ainſi $-b = -2$ doit deſcen-

Digitized by Google

dre au-deſſous de *b* troiſiéme terme. De 0 je fais un pas de la quantité du premier terme & j'arrive à l'unité, ſi j'en fais cinq, j'arrive au ſecond terme qui eſt + 5. De 0, je deſcens de la quantité 2 = *b* & j'arrive à — 2. Je continuë à deſcendre 5 fois de cette même quantité & j'arrive à — 10 = — 5 *b*.

Dans la ſeconde Proportion, je deſcens à — 2, c'eſt-à-dire dans le premier membre de la proportion, je m'éloigne de l'unité, de deux meſures égales à l'unité (qui eſt l'antecedent) en deſcendant. Dans le ſecond membre, je dois auſſi m'éloigner de deux meſures égales à l'antecedent *a* & cela en deſcendant, ce qui me donnera — *ab* = — 2 *a*.

10. Cela étant ainſi les mêmes raiſons pour leſquelles + × — donne —, demandent que — × — donne +, car 1. — 3 :: — 5. + 15. De — × —.

Pour arriver de 0 à 1 je monte : Dès là pour arriver de 1 à — 3, je fais tout le contraire, je reviens ſur mes pas, je deſcens d'abord de 1 à 0, c'eſt-à-dire je m'éloigne de l'unité, qui eſt le premier terme, ou l'antecedent, de la quantité de cet antecedent qui eſt l'unité à 0 ; puis je continuë à faire trois deſcentes égales & j'arrive à — 3, qui eſt le conſequent. De même dans le ſecond membre, pour arriver de 0 à — 5 l'antecedent, je deſcens de la quantité de cet antecedent. Après quoi je dois revenir ſur mes pas, & par conſequent remonter d'autant, & je ſuis derechef à 0. Dès là je continuë, & je fais trois montées égales à cette premiére qui m'avoit conduite à 0, ce qui m'amene à + 15. Premiere Preuve.

Dans le premier rapport le conſequent — 3, n'eſt pas l'antecedent 1 pris trois fois, mais il contient trois fois le retranchement de l'antecedent.

Digitized by Google

Dans le ſecond rapport ſi le conſequent étoit — 15, il contiendroit l'antecedent — 5 trois fois, mais il doit contenir trois fois ſon retranchement & par conſequent il doit être + 15.

Seconde Preuve.

11. La Multiplication eſt une Addition réïterée. Abſtenez-vous de poſer — 5 vous n'aurez rien. Poſez-le une fois vous avez — 5. Poſez-le trois fois vous aurez — 15. Faites tout le contraire, vous aurez + 15; car il y a trois operations differentes. Ne *point poſer*, *poſer*, *faire tout le contraire.*

Eclairciſſemens.

Pour aller du premier terme au ſecond, il faut premierement avancer contre zero de la valeur de l'unité; enſuite continuer à s'éloigner de l'unité de deux fois ſa valeur, c'eſt-à-dire, de deux fois la valeur du premier terme de la proportion. Pour en uſer de même dans la ſeconde raiſon, je vais du troiſiéme terme — 3 à zero, en m'approchant de zero du terme entier — 3 que je quitte; après cela continuant à le fuir de deux fois ſa quantité, j'arrive de o à 6.

— 3 eſt une dette, & la dette de celui qui n'a rien & qui doit 3. Multiplier — 3 par — 1, ce n'eſt pas ſeulement retrancher — 3 une fois; je fais cela en déchirant la cédule, ou en donnant 3 Ecus au debiteur pour la païer, après quoi il n'a rien.

Mais puiſque — 3 × — 1 donne + 3, pour amener de — 3 au Produit de — 3 par — 1, ce n'eſt pas aſſez d'ôter — 3 une fois, ou de poſer 3 une fois, il faut ôter — 3 deux fois, ou poſer 3 deux fois.

De même, pour arriver de — 3 au Produit de — 3 par — 2, ce n'eſt pas aſſez d'ôter — 3 deux fois, ou de poſer 3 deux fois; car en donnant deux fois 3 Ecus à celui qui n'a rien & qui en doit 3,

Digitized by Google

je ne l'amene pas à 6 Ecus, je l'amene seulement à 3 Ecus.

12. Quand je multiplie $\overline{7-3}$, par $\overline{7-3}$ Premier.

J'ai 1. $\overline{7-3} :: \overline{7-3}. 16$

Quand je multiplie $\overline{3-7}$, par $\overline{3-7}$

J'ai 1. $\overline{3-7} :: \overline{3-7}. 16.$

Dans ce dernier cas, de zero je suis venu à l'unité; puis je me suis éloigné de l'unité en sens contraire de quatre fois sa valeur. Je m'éloignerai de même de $3-7 = -4$ en sens contraire de quatre fois sa valeur, & j'aurai $+16$; tout comme j'ai eu 16, (dans le cas precedent,) en m'éloignant de $7-3 = 4$, dans le même sens que je m'étois éloigné de l'unité pour avoir $7-3$.

Ce cas a paru à Clavius un abîme, un mystere pour l'esprit humain, de la verité duquel il ne pouvoit disconvenir, quoiqu'il ne le pût comprendre.

13. La Multiplication est l'Addition réïterée d'une certaine Quantité, & cette Addition de la Quantité multipliée se réïtere autant de fois qu'il y a d'unités dans la Quantité multipliante. Second.

Ainsi multiplier b par c, c'est réïterer la position de b autant de fois que l'unité se trouve contenuë en c.

Multiplier b par zero, c'est le poser autant de fois que l'unité se trouve contenuë en zero; par consequent c'est ne le poser aucune fois; c'est l'omettre, le negliger, le faire évanoüir.

Multiplier b par -3, c'est le poser autant de fois que l'unité se trouve contenuë en -3; & comme loin d'y être contenuë, elle en est au contraire retranchée 3 fois : par consequent loin de

poſer b, il faut le retrancher 3 fois, c'eſt-à-dire le poſer 3 fois ſous un ſigne contraire, ce qui donne $-3b$.

Multiplier $-b$ par -3, ce ſera donc non pas poſer $-b$, 3 fois, mais le retrancher 3 fois, & par conſequent l'écrire 3 fois ſous un ſigne contraire, ce qui donne $+3b$.

Poſer $-b$, 3 fois, c'eſt écrire $-3b$. Faire tout le contraire, c'eſt écrire $+3b$.

Troiſiéme Preuve.

14. Pour multiplier $a-b$ par $c-d$, je me conduis ainſi : 1°. a multiplié par c, donne ac. Mais comme j'avois à multiplier, non pas a entierement, mais $a-b$, ac étant a multiplié par c, ce produit eſt trop grand de b multiplié par c, je retranche donc bc de ac, & j'écris en ſecond lieu $-bc$: mais en troiſiéme lieu, comme j'ai fait la Multiplication par c tout entier, au lieu qu'il falloit la faire par $c-d$, j'ai multiplié a par d de trop, & pour corriger cet excez dans mon produit, il faut écrire $-ad$. Enfin, quand je retranche ad, je retranche trop, puiſque je n'ai pas multiplié a tout entier par c, mais $a-b$; j'ai donc retranché de trop la valeur de b multiplié par d; & ce retranchement exceſſif, je le corrige en replaçant ce que j'avois ôté de trop; j'écris donc en quatriéme lieu $+bd$, & j'ai pour produit total $ac-bc-ad+bd$.

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline ac-bc-ad+bd. \end{array}$$

Quatriéme.

15. Il faut concevoir a compoſé de deux parties, dont l'une eſt e & l'autre b, de ſorte que $e+b=a$: De même, il faut concevoir c compoſé de deux parties, dont l'une ſoit d & l'autre

Digitized by Google

f, en telle ſorte que $d + f = c$. Cela poſé, il eſt évident que ce ſeroit la même choſe, de multiplier a par c, ou de multiplier $e + b$ par $d + f$: de ſorte que $ac = de + bd + ef + bf$. Mais quand je multiplie $a - b$ par $c - d$, je multiplie ſeulement la partie e par la partie f; car puiſque $e + b = a$. $e = a - b$, & puiſque $d + f = c$, $c - d = f$.

Or en multipliant e par f, j'ai $ef = a - b$ multiplié par $c - d$, ainſi $ac = de + bd + ef + bf$, differe de $a - b$ multiplié par $c - d$, c'eſt-à-dire differe de ef, de $de + bf + bd$.

Or $ac - bc - ad + bd$, c'eſt la même choſe que $de + bd + ef + bf - bc - ad + bd$, ce qui corrigé, donne $de + 2bd + ef + bf - bc - ad$.

Et en mettant à la place de c, $f + d$; $- bc$ ſera $= - bf - bd$: & en mettant à la place de a, $e + b$; $- ad = - de - bd$.

De ſorte que $ac - bc - ad + bd$, ou ce qui eſt la même choſe, $de + bd + ef + bf - bc - ad + bd$, ou $de + 2bd + ef + bf - bc - ad$, ſi l'on fait les ſubſtitutions $- bf - bd$ à la place de $- bc$ & $- de - bd$, à la place de $- ad$, cette Somme, dis-je, qui eſt le Produit de $a - b$ par $c - d$, s'exprimera ainſi: $de + 2bd + ef + bf - de - bd - bf - bd$. Et ſi on la corrige $+ de + 2bd + ef + bf - de - 2bd - bf$

Elle ſe réduira à $\overline{\quad * \quad * \quad + ef \quad * \quad}$

16. On peut encore démontrer plus ſimplement la neceſſité de reconnoître que $- \times - = +$. Cinquiéme.

Soit $a = b + c$. Donc $a - c = b$.

$a \times -d = b + c \times -d$. Donc $-ad = -bd - cd$, & en ajoûtant de côté & d'autre $+cd$, on aura $-ad + cd = -bd$. Or 1°. $-bd$, c'eſt $b \times -d$. 2°. $b = a - c$. Donc $b \times -d = a - c \times -d$. Donc $-bd = a - c \times -d$. Or $-bd = -ad + cd$. Donc $-ad + cd = a - c \times -d$, & par conſéquent il faut que $-c \times -d$ ſoit $+cd$.

La Preuve quatriéme expoſée dans ſes parties.

17. $a = e + b$. D. $a - b = e$, car $e + b - b = e$
$c = f + d$. D. $c - d = f$, car $f + d - d = f$.

$$\begin{array}{l} a - b = e \\ c - d = f \\ \hline ac - bc - ad + bd = ef \end{array}$$

$-b \times -d = +bd$

$$\begin{array}{l} a = e + b \\ c = f + d \\ \hline ac = ef + bf + de + bd \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -b = -b \\ +c = +f + d \\ \hline -bc = -bf - bd. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -d = -d \\ +a = +e + b \\ \hline -ad = -de - bd. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ef + bf + de + 2bd \\ -bf - de - 2bd. \\ \hline ef \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

D. $ac - bc - ad + bd = ef + bf + de + bd$
$[-bf - bd - de - bd + bd = ef$.

18. Autrement encore. Soit $c = d + f$. $c - d = d + f - d$, & $a - b \times c - d = a - b \times d + f - d$.

Or

Or 1°. $a - b \times d + f = ad - bd + af - bf$.

2°. Puiſque je multiplie, non par $d + f$, mais par $\overline{d + f - d}$, il eſt viſible que je multiplie par f ſeulement.

3°. Par conſequent $\overline{a - b} \times \overline{\overline{d + f} - d} = af - bf$.

4°. $a = e + b$, $a \times f = af = \overline{e + b} \times f = ef + bf$.

5°. Donc $af - bf = ef + bf - bf = ef$.

6°. Donc $a - b \times c - d = ef$.

7°. $\overline{a - b} \times \overline{c - d}$ renferme inconteſtablement $ac - bc - ad$. Il s'agit de $-b \times -d$.

Voïons ce qu'il faut ou ajoûter à $ac - bc - ad$, ou en retrancher pour l'égaler à ef.

$a = e + b$. Donc $ac = ce + bc$. $c = d + f$. Donc $ce + bc = ac = de + ef + bd + bf$.

Voila pour le premier terme ac.

Le 2d $bc = bd + bf = -bc = -bd - bf$.

Donc $ac - bc = de + ef + bd + bf = ed + ef - bd - bf$

Paſſons au troiſiéme. $a = e + b$. Donc $ad = de + bd$. Donc $-ad = -de - bd$. Donc $ac - bc - ad = +de + ef - bd = ef - bd - de$.

Les trois produits $ac - bc - ad$ ne me donnent pas ef, mais $ef - bd$. J'ai $ac - bc - ad = ef - bd$.

Ajoutant de côté & d'autre bd, j'aurai $ac - bc - ad + bd = ef$. Donc $a - b \times c - d = ef = ac - cb - ad + bd$.

19. Quand on a eu le même Nombre à ajoûter pluſieurs fois, on s'eſt ſervi d'une maniere d'Addition abregée, que l'on a appellée *Multiplication*. Comment. Sixiéme Eclairciſſement.

me les premieres Operations ont roulé ſur les *Nombres entiers*, que les *Fractions* ne ſont venuës qu'enſuite, & les operations Algebriques longtems après, ce terme de Multiplication étoit d'abord très-juſte; car ce qui réſultoit après l'operation, étoit toûjours une Somme plus grande que le Nombre multiplié. Cependant cette Operation étoit plus compoſée qu'on ne l'avoit d'abord conçûë; car multiplier le Nombre *a* par le Nombre *b*, c'eſt ajoûter le Nombre *a* autant de fois que l'unité ſe trouve dans le Nombe *b* : c'eſt par conſequent chercher un Nombre qui contienne le Multiplié, comme le Multipliant contient l'unité.

20. Cela poſé, il eſt évident qu'une Multiplication renferme la valeur d'une Regle de Trois, dans laquelle l'Unité eſt le premier terme, le Nombre Multipliant le ſecond, le Multiplié le troiſiéme, & le Produit le quatriéme; de ſorte que univerſellement, comme l'Unité eſt au Multipliant, ainſi le Multiplié doit être au Produit.

21. C'eſt par cette raiſon que le Produit devient plus petit que le Multiplié, lorſque le Multipliant eſt une Fraction; car comme 1 eſt plus grand qu'un $\frac{1}{4}$, ainſi le Multiplié 12 eſt plus grand que le Produit 3; & en general, quand 1 ſurpaſſe la Fraction $\frac{e}{f}$, le Multiplié *b* doit ſurpaſſer dans la même proportion le Produit *c*.

22. Quand donc je multiplie -2 par -3, le même rapport que l'Unité a avec le Multipliant -3 doit préciſément regner entre le Multiplié -2 & le Produit. Depuis 1 pour aller à -3. Premierement, je deſcens d'un degré & je ſuis à 0, depuis 0 je continuë à deſcendre de 3 degrez

pour venir à — 3, donc il faudra de même premierement que je porte le Multiplié — 2 ſur 0 ; enſuite il faudra continuer à lui faire faire en-delà de 0 trois fois autant de chemin qu'il en a fait pour venir à 0. Or pour venir à 0, le Multiplié — 2 eſt monté de 2 ; par conſequent en lui faiſant faire trois cette montée on l'élevera à 6.

23. Quand donc je multiplie — 2 par — 3, je cherche un Produit qui s'éloigne de — 2, autant que — 3 s'éloigne de l'Unité ; & tel eſt + 6 ; car — 3 eſt éloigné de 1 juſtement de 4 fois ce terme, & + 6 s'éloigne de — 2 juſtement auſſi de 4 fois 2.

Afin que le même rapport regne, d'un côté entre l'Unité & le Multipliant — 3, & de l'autre entre le Multiplié — 2 & ſon Produit ; il faut que de la même maniere & dans le même ſens que le ſecond terme differe du premier (or il en differe de 4 fois le premier) ; de la même maniere auſſi le Produit + 6, qui eſt le quatriéme terme, differe de — 2, qui eſt le troiſiéme, & par conſequent qu'il en differe ici de 4 fois ce troiſiéme.

De cette maniere, comme il s'en faut 4 unitez que — 3 ne contienne 1 : de la même maniere auſſi il s'en faut 4 fois — 2 que + 6 ne contienne — 2 ; & ainſi de la même maniere que le premier terme eſt contenu dans le ſecond, le troiſiéme terme eſt contenu dans le quatriéme.

Septiéme Eclairciſſement.

24. La Multiplication renfermant donc une Regle de Trois, lorſque toutes les Quantitez qui la compoſent ſont de même nature, l'on peut dire tout ſimplement & à la lettre que l'Unité contient le Multipliant, comme le Multiplié contient le Produit. + 1 contient + 3, comme + 2 contient + 6, & — 1 contient — 3, comme — 2

contient — 6 : mais lorſque les Quantitez ſont de nature oppoſée, & ſe trouvent ſous des Signes contraires, le langage devient figuré, & c'eſt ce qui donne quelque embaras. Quand je dis + 1 contient — 3, comme — 2 contient + 6, ces expreſſions ſont figurées; car à parler exactement & ſans figure, + 1 ni ne renferme pas — 3, & n'eſt point compoſé de ſes parties; & — 2 ne renferme pas + 6, ni n'en eſt compoſé. En m'exprimant ainſi je me ſers du même ſtile que ſi je diſois : un tel Vertueux contient le Vice, comme un tel Vicieux contient la Vertu, pour dire qu'ils ſont également éloignez, l'un du Vice & l'autre de la Probité; de ſorte que cette proportion 1 eſt à — 3, comme — 2 à + 6, ſignifie 1 eſt éloigné de — 3, comme — 2 eſt éloigné de + 6. Pour arriver du premier terme au ſecond, il faut ôter 4 fois ce premier; il faut faire 4 fois tout le contraire que de le poſer : de même donc ſi je fais 4 fois tout le contraire que de poſer — 2 (3e terme) depuis ce 3e terme, j'arriverai à + 6; car comme le 1r & 4 fois ſon contraire donne — 3, auſſi — 2, & 4 fois ſon contraire donne + 6.

Huitiéme Eclairciſſement.

25. Cette expreſſion, le + contient le —, eſt équivoque. Une plus grande Quantité en contient une moindre de même nature, ou en tout, ou en partie; celui qui poſſede 6, contient 3 fois le bien de celui qui poſſede 2; & celui qui doit 3, a pour dette une ſomme qui contient 3 fois la ſomme des dettes de celui qui doit 1, ce que le ſecond doit ſe trouve 3 fois dans ce que doit le 1r : ainſi + 6 contient 3 fois + 2 & + 2 contient une partie de + 6; de même — 3 contient — 1, car qui dit — 3, dit 3 fois — 1, comme — 1 contient une partie de — 3; car qui dit — 1,

Digitized by Google

dit le tiers de — 3. Mais lorſque les Quantitez ſont de differente nature, c'eſt-à-dire quand les differens Signes + & — avertiſſent que, d'un côté l'on poſe, & que de l'autre l'on éloigne, lorſque le Signe — marque, non pas la poſition d'une moindre Grandeur, mais un éloignement de toute Grandeur, alors on ne peut pas dire que + contienne —; car ſi + contenoit —, en accumulant les —, on parviendroit au +; & en entaſſant les Négations, on arriveroit à quelque choſe de Poſitif : ſi + 1 contenoit — 3, ce — 3 ſeroit une partie de + 1, & en réïterant l'addition de cette partie, on feroit que pluſieurs — 3 égaleroient 1. Il eſt manifeſte que les dettes ne peuvent être une partie du bien, & que ce qui eſt à la gauche ne peut faire partie de ce qui eſt à la droite.

Quand donc je multiplie — b par — c, je cherche un Produit tel que je puiſſe dire 1. — c :: — b, à ce Produit que je cherche. Comme donc pour venir du premier terme 1 au ſecond terme — c, il faut deſcendre, 1°. du premier terme au 0, en ſecond lieu faire deſcendre ce premier terme au-deſſous de 0 autant de fois qu'il ſe trouve dans le ſecond c : il faudra de même pour obſerver dans la Seconde Comparaiſon le me progrez de contrarieté, faire 1°. monter le 3e terme — b au 0, & en ſecond lieu continuer à le faire monter par-deſſus le 0, autant de fois que le premier terme eſt deſcendu au-deſſous, ou autant de fois que l'unité ſe trouve dans le ſecond terme c; un tel Produit ſera donc + bc.

Par ce moïen le 4e terme + bc eſt éloigné de contenir le 3e — b, comme le ſecond — c eſt éloigné de contenir le premier 1; ou autant que le premier 1 eſt éloigné de faire partie du ſecond — c,

autant le 3e — b eſt éloigné de faire une des parties qui compoſent $b\,c$.

Neuviéme Eclairciſſement. FIG. III.

26. Que le Point O ſoit celui où ſe croiſent les lignes $D\,H$, $F\,B$, j'exprime par des + les parties de $O\,D$ qui montent, & par des — les parties de $O\,H$ qui deſcendent; j'exprime auſſi les parties de $O\,B$ à la droite par des +, & par des — les parties de $O\,F$ à la gauche: Si je multiplie + m = $O\,A$ par + n = $O\,C$, j'aurai le Produit $m\,n$ = $O\,C\,V\,A$: Si je multiplie — $E\,O$ = — p par $O\,C$ = + n, j'aurai — $p\,n$ = — $E\,L\,C\,O$, & de ces 2 Rectangles, vis-à-vis l'un de l'autre, l'un eſt + & l'autre —: Si je multiplie $O\,G$ = — r par $O\,A$ = + m, j'aurai — $r\,m$ = — $G\,O\,A\,I$; & ſi je multiplie $E\,O$ = — p par $G\,O$ = — r, j'aurai + $r\,p$ = + $G\,O\,E\,Y$, & de ces 2 Rectangles, vis-à-vis l'un de l'autre, ſeparez par la ligne $D\,H$, l'un eſt marqué du Signe + & l'autre du Signe —, car l'un & l'autre deſcend: la deſcente eſt donc commune; mais ce qu'ils ont d'oppoſé, c'eſt que l'un eſt à la droite & l'autre à la gauche.

Ainſi tous les Rectangles compoſez de 2 Racines affectées de mêmes Signes, s'expriment par +, & lorſque les 2 Racines ſont affectées de Signes differens, leur Rectangle eſt exprimé par —. Dans le premier cas, dès que l'une des Racines eſt affectée du Signe +, je conclus que l'autre s'exprime de même; & ſi l'une a le Signe +, je tire la même concluſion pour l'autre; c'eſt-à-dire, que ſi l'une va à la droite, je conclus que l'autre monte, & ſi l'une deſcend, je conclus que l'autre va à la gauche; mais dans les Rectangles affectez du Signe —, ſi un des côtez monte, je conclus que l'autre va à la gauche, & ſi l'un va à la droite, je conclus que l'autre deſcend.

Digitized by Google

27. $+2 \times +3$, donne inconteſtablement $+6$.

On n'a pas non plus de difficulté à comprendre que $+2 \times -3$, donne -6; car $+2$ pris autant de fois que l'unité eſt dans -3, c'eſt $+2$ éloigné ou retranché autant de fois que l'unité eſt éloignée ou retranchée de -3.

On conçoit encore auſſi aiſément que $-3 \times \pm 2$ donne -6, car comme une fois -3 c'eſt -3, 2 fois -3 ſeront -6; comme une fois -3, c'eſt l'unité éloignée 3 fois; ſi je l'éloigne le double, je l'éloignerai 6 fois.

Si on ne multiplie que des Quantités Homogénes.

On ne ſe ſeroit donc pas aviſé de dire que l'on ne peut multiplier, à proprement parler, ni établir des proportions qu'entre des Quantitez Homogénes, & que par conſequent on ne peut pas dire $1. -2 :: -3. +6$, ſi l'on n'avoit été embaraſſé par ce que cette Multiplication offre d'abord de ſurprenant & preſque incroïable.

1°. Il faut, dit-on, que la Quantité Négative ait toûjours été precedée d'une Poſitive; mais quand je multiplie $a-b$ par $c-d$, après avoir dit $a \times a = aa$, je prens membre après membre $a \times -d$, $-b \times c$ & enfin $-b \times -d$.

2°. D'ailleurs ne multiplie-t-on pas une Quantité finie par des infiniment Petits de divers genres? Et de tout tems n'a-t-on pas multiplié une Surface par une Ligne pour avoir un Solide, comme on diviſe un Solide par une Quantité Linéaire pour avoir une Surface? Ces idées vagues de Métaphyſique & ces expreſſions équivoques d'Homogéne & d'Heterogéne, ne doivent pas ébloüir un Mathématicien. Elles ſont trop vagues. Nos Démonſtrations doivent rouler ſur des principes plus déterminez. En Phyſique, en Méchanique, on

multiplie l'Eſpace par le Tems, & le Tems par l'Eſpace, & cela directement & reciproquement pour les Theories du Mouvement.

3°. Quand on multiplie $5 - 2 = 3$
par $5 - 2 = 3$
on a $25 - 10$
$- 10 + 4$
$25 - 20 + 4 = 9$

Car 1°. $5 \times 5 = 25$. 2°. Mais je multipliois $5 - 2$, il y a donc deux unitez en 5 que je ne devois pas ajoûter chacune 5 fois; il faut par conſequent les retrancher de 25 écrire -10.

3°. J'ai pris 5 cinq fois, il falloit le prendre deux fois moins; voila pourquoi j'écris encore -10.

4°. Mais ce n'eſt pas 5 tout entier, c'eſt $5 - 2$ qu'il falloit prendre deux fois moins, j'ai donc retranché 2 deux fois de trop; il faut le remettre & écrire $+4$.

Quand je multiplie $2 - 5 = -3$
par $2 - 5 = -3$
Je ſuis la même méthode & j'ai $4 - 10 + 25 = 9$
-10

On ne peut pas appliquer à cet exemple le raiſonnement précedent, ni le rendre ſenſible par l'image d'un Rectangle. Cependant il ſe trouve bien des cas où les Racines d'un Produit ſont Négatives, & où une Quantité eſt exprimée par deux membres, dont le premier Poſitif eſt plus petit que le ſecond Négatif.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

De la Diviſion.

1. LA Diviſion défait ou deſaſſemble ce que la Multiplication a fait ou aſſemblé. Effet eſſentiel de la Diviſion.

2. La Quantité que l'on doit diviſer eſt un Produit dont le Diviſeur eſt une des Racines & le Quotient l'autre. On cherche donc pour Quotient une Grandeur, qui multipliant le Diviſeur produiſent le Diviſé. Expoſé par ſes parties.

3. Lorſque le Diviſeur & le Diviſé ſont exprimez par les mêmes lettres, s'il y en a autant dans l'un que dans l'autre, c'eſt-à-dire s'ils ſont de même valeur, l'on a pour Quotient l'unité : par exemple, a^3 diviſé par a^3, donne 1, une fois a^3 c'eſt a^3. Premier cas.

4. S'il y a plus de Lettres dans le Diviſeur que dans le Diviſé, il en faut faire une Fraction : ainſi a^3 diviſé par a^4, donne $\frac{a^3}{a^4}$ ou $\frac{1}{a}$; car ſi on multiplie chaque terme par a^3, on aura $\frac{a^3}{a^4} \cdot a^3 = aaa$. $a^4 = aaaa$. Donc $\frac{a^3}{a^4} = \frac{aaa}{aaaa}$. Diviſez aaa par aaa, le Quotient eſt 1 : diviſez $aaaa$ par aaa, le Quotient eſt a ; ainſi $\frac{aaa}{aaaa} = \frac{1}{a}$ (Arithm.) On effacera donc dans le Denominateur les Lettres du Numerateur, & dans le Numerateur, on mettra l'Unité à la place des Lettres retranchées du Denominateur. Second.

Si l'on avoit à diviſer ba^3 par a^5, on écriroit $\frac{baaa}{aaaaa} = \frac{1b}{aa} = \frac{b}{aa}$.

Troiſiéme cas. 5. Mais ſi le Diviſé contient plus de fois la même Lettre que le Diviſeur, l'on a pour Quotient la difference ; ainſi a^5 diviſé par a^2, donne pour Quotient a^3, parce que a^3 multipliant a^2, produit a^5.

Quatriéme. 6. Si le Diviſé contient tout le Diviſeur, avec quelques autres Lettres, on ôte du Diviſé celles qui lui ſont communes avec le Diviſeur, & le reſte eſt le Quotient : par exemple, ſi je diviſe $abcd$ par cd, j'aurai pour Quotient ab ; car ab multipliant cd, donne $abcd$.

Cinquiéme. 7. Mais ſi je ne puis ôter le Diviſeur du Diviſé, la Diviſion ſe marque par une Fraction. Ainſi abc diviſé par de, donne $\frac{abc}{de}$.

Sixiéme. 8. Quand le Diviſé & le Diviſeur ſon affectez du Signe $+$, le Quotient aura auſſi le même Signe, parce que pour produire le Diviſé qui eſt un $+$, en multipliant le Diviſeur il faut que le Quotient qui le multipliera ſoit un $+$ auſſi-bien que le Diviſeur. Par la même raiſon, ſi le Signe du Diviſé eſt $+$, & que le Signe du Diviſeur ſoit $-$, il faut que le Signe du Quotient ſoit auſſi $-$, parce que le Diviſeur & le Quotient doivent être affectez du même Signe, afin qu'en ſe multipliant l'un l'autre, ils produiſent le Diviſé avec ſon Signe $+$. Mais ſi le Diviſé a le Signe $-$ & le Diviſeur le Signe $+$, le Quotient aura le Signe $-$, afin que ce Quotient $-$ multipliant le Diviſeur $+$, produiſe le Diviſé $-$.

Ainſi $+a^3$ diviſé par $+aa$, donne pour Quotient $+a$: $+a^3$ diviſé par $-aa$, donne pour Quotient $-a$.

Mais $-a^3$ diviſé par $-aa$, donera pour Quotient $+a$.

Digitized by Google

9. Lorſque le Diviſé eſt compoſé de pluſieurs Quantitez jointes par les Signes + ou —, ſi le Diviſeur eſt une Grandeur incomplexe, on l'ôtera ſucceſſivement de toutes les parties du Diviſé, & l'on aura dans le Quotient autant de parties jointes par les Signes + & — qu'il y en a dans le Diviſé ; par exemple, ſi je diviſe $aa - a^3bc + a^4c$ par aa, j'aurai pour Quotient $1 - abc + aac$. Septiéme.

10. Mais s'il ſe trouve quelque membre duquel on ne pût retrancher le Diviſeur, ce membre ſeroit regardé comme un Reſte, qui, avec le Diviſeur donneroit une Fraction : ſi par exemple, $b^4d - b^3 + dc$ eſt diviſé par bb, il donne pour Quotient $bbd - b + \frac{dc}{bb}$. Huitiéme.

11. S'il y a pluſieurs Grandeurs dans le Diviſeur auſſi-bien que dans le Diviſé, il faudra 1°. diviſer par la premiere Quantité du Diviſeur, tout autant de parties du Diviſé qu'il ſe pourra, & marquer par ordre les parties trouvées dans le Quotient, comme ſi on n'avoit eu que cette ſeule Grandeur pour le Diviſeur. 2°. Il faudra multiplier par ces parties trouvées pour le Quotient le ſecond membre du Diviſeur, & ôter les produits du Diviſé. 3°. L'on ſuivra la même Méthode, en multipliant par le Quotient d'abord trouvé, le troiſiéme membre du Diviſeur : que ſi après cela il reſte encore quelques membres dans le Diviſé, il en faudra faire une Fraction. Neuviéme.

J'ai $abd + ccdd - bccd + abee + ccdee - bccee$ à diviſer par $d + ee$.

1°. $abd + ccdd - bccd$ ſe diviſent par d, & donnent pour Quotient $ab + ccd - bcc$.

2°. Par ce Quotient je multiplie d, & j'ôte

les Produits du Diviſé. Alors il me reſte $abee + ccdee - bccee$ que je diviſe par ee, & il me vient pour Quotient $ab + ccd - bcc$.

3°. Je multiplie par le Quotient la ſeconde Grandeur du Diviſeur, & j'ai $abee + ccdee - bccee$, que j'ôte du Diviſé, il ne me reſte rien, & la Diviſion eſt achevée.

Si le Diviſeur avoit été $fd + ee$, la Diviſion n'auroit pû ſe faire, parce que l'on n'auroit pû retrancher fd des Produits qui compoſent la Somme du Diviſé.

Si après les ſix Grandeurs qui compoſent le Diviſé precedent, il s'étoit trouvé pour une ſeptiéme $+ bcf$ par exemple, le Quotient auroit été $(ab + ccd - bcc + \frac{bcf}{d+ee}$.

Sixiéme cas. 12. Si les Lettres, ſoit du Diviſeur, ſoit du Diviſé, ſont precédées de Chifres, il faudra faire la Diviſion des Chifres, & l'on aura pour Quotient un Nombre que l'on mettra à la tête des Lettres qui lui ſeront jointes; ainſi lorſque je diviſe $15a^4bc$ par $3aab$, j'ai pour Quotient $5aac$.

Remarque. 13. La Diviſion d'une Grandeur complexe par une autre auſſi complexe, lorſque les differentes Grandeurs qui les compoſent ſont precédées par des Chifres, eſt ſouvent fort embaraſſante; & il n'en eſt pas comme dans les Diviſions de Nombres que l'on pouſſe exactement juſques à un certain reſte, qui ſe réduit à une Fraction fort intelligible; mais lorſque les Lettres ſont mélangées de Chifres, pour l'ordinaire en cherchant le Quotient, on eſt bien-tôt réduit à une Fraction embaraſſante: de ſorte que pour ſe former à la Diviſion Algebrique, il faut ſe donner ſoi-même des exemples; en multipliant deux Quantitez complexes

Digitized by Google

l'une par l'autre, le Produit ſervira de Diviſé, & l'une des Racines de Diviſeur.

14. On fait divers eſſais. 1°. On choiſit une des Grandeurs du Diviſeur, & en ne faiſant attention qu'à ſes Lettres, on cherche dans le *Dividende* des Grandeurs litterales que celle-ci puiſſe diviſer. Avis.

2°. On voit ſi le Coëfficient de cette premiere Grandeur choiſi dans le Diviſeur, (c'eſt-à-dire le Nombre qui eſt à la tête de ſes Lettres) diviſe auſſi les Coëfficiens des Grandeurs dont elle a diviſé les Lettres, & on met à part les Grandeurs du Dividende qui ont ce caractere.

3°. On paſſe aux autres, & on choiſit dans le Diviſeur une autre Grandeur par où l'on diviſe de le même maniere ce qui ſe peut des Grandeurs du Dividende.

4°. On ſe ſert d'une troiſiéme Grandeur du Diviſeur pour continuer ſur ce qui reſte dans le Diviſé.

5°. On laiſſe les Coëfficiens, & on eſſaïe de faire la Diviſion des Lettres par les Lettres.

6°. En diviſant enſuite les Nombres par les Nombres, on donne des Coëfficiens aux Grandeurs du Quotient qu'on avoit d'abord trouvé, & qui n'étoit compoſé que de Grandeurs litterales, & ſi ces Grandeurs avec leurs Coëfficiens multipliant le Diviſeur avec les ſiens produiſent le Diviſé, on a ce que l'on cherchoit.

J'ai à diviſer par $8ac - 4bd + 3fg$.

$256aabc + 424abcc - 56aacd - 448abbd - 742bbcd + 98abdd + 96abfg + 159bcfg - 21adfg$.

1°. Je mets à part les Coëfficiens, 2°. Je vois que par la Grandeur ac je diviſe $aabc + abcc - aacd$, & j'ai pour Quotient $ab + bc - ad$.

Digitized by Google

3°. Par la Grandeur — bd je diviſe — $abbd$ — $bbcd + abdd$, & j'ai encore pour Quotient $ab + bc - ad$.

4°. Par la Grandeur fg je diviſe les trois qui reſtent, & j'ai le même Quotient.

5°. Je viens aux Coëfficiens, & par 8 je diviſe 256, 424, 56, & j'ai pour Quotient 32. 53. 7.

6°. En mettant ces 3 Coëfficiens l'un après l'autre, à la tête de $ab + bc - ad$, & en multipliant $8ac - 14bd + 3fg$, j'ai pour Produit mon Dividende par $32ab + 53bc - 7ad$.

J'aurois auſſi pû pouſſer tout d'un coup de cette maniere. 1°. 256 diviſé par 8, donne 32, & $aabc$ diviſé par ac, donne ab, j'ai donc pour Quotient total $32ab$. 2°. Par ce Quotient je multiplie les 3 quantitez du Diviſeur, & j'ai pour Produit $256\ aabc - 448\ abbd + 96\ abfg$; j'ôte ces trois Grandeurs du Diviſé, après quoi 3°. je cherche combien $8ac$ eſt en $424\ abcc$, & je trouve pour Quotient $+53bc$: par ce Quotient je multiplie tout ce Diviſeur, & j'ai $+424\ abcc - 742\ bbcd + 159\ bcfg$, j'éface encore ces 3 Grandeurs du Diviſé : enfin je cherche derechef combien ma premiere Grandeur $8ac$ eſt contenuë dans $-56\ aacd$, & je trouve pour Quotient $-7ad$; j'opere comme ci-devant, & la Diviſion eſt achevée.

Second avis. 15. Les Grandeurs qui compoſent la Somme complexe du Diviſé & la Somme complexe du Diviſeur, ſe trouvent quelquefois rangées d'une maniere qui embaraſſe la Diviſion ; de ſorte qu'il faut changer l'ordre de l'une & de l'autre pour rendre la Diviſion pratiquable. Si, par exemple, j'avois pour le Diviſé $371\ accd - 1378\ bcdd$

Digitized by Google

— 624 *abbd* + 168 *abcc*, & pour Diviſeur — 26 *bd* — 7 *ac*, je devrois d'abord chercher dans le Diviſé la plus groſſe Somme pour la placer la premiere ; je commencerois donc par — 1378 *bcdd*, puis je chercherois dans le Diviſeur une Grandeur dont les Lettres diviſaſſent exactement *bcdd*, & s'il s'en trouvoit pluſieurs, je prendrois la plus grande : je diviſerois donc d'abord — 1378 *bcdd* par — 26 *bd*, & j'aurois pour Quotient + 53 *cd*, avec lequel Quotient j'opererois, ſuivant la Méthode de l'Article précedent, & j'aurois pour Total Quotient 53 *cd* + 24 *ab*.

16. Tout Dividende peut être conſideré comme un Produit du Diviſeur par le Quotient, & par la Diviſion on entreprend de défaire ce que la Multiplication a fait. Troiſiéme.

Lorſque le Multiplié & le Multipliant ſont chacun des Grandeurs complexes, & que dans l'un & dans l'autre il y a quelques Quantitez formées par un même aſſemblage de Lettres, il ſe forme dans le Produit deux Sommes ſous un même Signe ; & quelquefois ces deux Sommes s'uniſſent en une par l'Addition, quand les Signes ſont les mêmes, quelquefois par Souſtraction quand ils ſont differens.

Quelquefois deux Sommes s'évanoüiſſent ; car quand elles ſont égales, & qu'elles ſe trouvent ſous des Signes differens, l'un fait effacer l'autre.

Dans ces cas là la Diviſion, qui defait ce que la Multiplication a fait, doit rappeller les Sommes évanoüies, & ſeparer celles qui étoient aſſemblées.

Lorſque d'une Somme il en faut faire deux, cette Somme doit ſervir à trouver deux Quotiens ; & parce qu'elle s'étoit formée elle-même de deux

Digitized by Google

Multiplications, elle doit donner lieu à deux Diviſions. Comment démêler ces Sommes d'avec les autres, & comment les partager préciſément dans les deux portions qui les ont formées?

Pour en venir à bout, il faut remarquer que l'on n'a jamais de telles Sommes que quand la même Grandeur ſe trouve dans le Multiplié & dans le Multipliant.

Dans ces cas là, elle ſe multiplie toûjours une fois elle-même, & par conſequent un tel Dividende contient toûjours parmi ſes Grandeurs quelqu'une qui ſoit le Produit d'une des Grandeurs du Diviſeur multipliée par elle-même.

Une quantité ne ſe multiplie jamais par elle-même qu'une fois; & ainſi ces Grandeurs du Dividende, qui contiennent un terme du Diviſeur multiplié par lui-même, ne ſont point équivoques, & ne ſont jamais formées de l'aſſemblage de deux autres. C'eſt donc dans ces Grandeurs qu'il faut 1°. chercher le Quotient, 2°. par celui quelles donneront il faut multiplier tous les termes du Diviſeur, & par là les Grandeurs du Diviſé évanoüies ſe manifeſteront, & les compoſées ſe partageront.

Lorſque le même aſſemblage de Lettres ſe trouve dans le Multiplié & le Multipliant avec des Coëfficiens numeriques differens, on n'a pas dans le Dividende une Grandeur qui ſoit, par rapport aux nombres, le Produit d'un des termes du Diviſeur multiplié par lui-même, mais la Grandeur Litterale eſt toûjours un tel Produit.

Lorſqu'un Multiplié & un Multipliant contiennent les mêmes Grandeurs ſous des Signes differens, il ſe forme un Produit dans lequel des Grandeurs ſont évanoüies, & d'autres qui devroient avoir

avoir deux places, ſont raſſemblées en une. Lors donc qu'un tel Produit doit être diviſé par l'une de ſes Racines, on ſe trouve dans l'embaras; & pour s'en tirer il faut diviſer plus d'une fois la même Somme par le même Diviſeur, ſavoir la premiere fois l'on diviſe la Somme entiere, & la ſeconde fois ſon Reſte.

Outre cela, en multipliant par le Diviſeur le Quotient trouvé, ſi l'on rencontre pour Produit des Grandeurs qui ne ſe trouvent pas dans le Diviſé, il faudra marquer ces Grandeurs à part, & continuer l'operation comme ſi cet obſtacle n'étoit pas arrivé; la même Grandeur qui dans une des Diviſions aura paru ſous un Signe, paroîtra dans une ſuivante ſous le Signe oppoſé, & par là l'on comprendra pourquoi elle s'étoit évanouie dans le Diviſé.

17. Je dois diviſer $-6aabd+16acdd+8aadd-9aabb+21abcd-10ccdd$ par $2ad-3ab+5cd$. Exemples.

D'abord je multiplie les Lettres de chaque Grandeur qui compoſe mon Diviſeur par elles-mêmes, & j'ai pour premier Produit $aadd$, pour ſecond $aabb$, pour troiſiéme $ccdd$. 2°. Je place les 3 Grandeurs $8aadd-9aabb-10ccdd$ les trois premieres dans le Diviſé, & je commence par dire, le Quotient de $8aadd$ diviſé par $2ad$, c'eſt $+4ad$. En multipliant ce Quotient par le Diviſeur, j'aurai $8aadd-12aabd+20acdd$, ce qui me fera retrouver $+6aabd-4acdd$. Je continuerai à chercher le Quotient de $-9aabb$ diviſé par $-3ab$, qui ſera $+3ab$, & continuant mon operation, j'aurai enfin pour Quotient total $4ad+3ab-2cd$.

Si j'ai $16aabb-256aadd-384acdd$

— 144 *ccdd*, & qu'il faille faire la Diviſion par 4 *ab* + 16 *ad* + 12 *cd*.

Je demande d'abord combien 4 *ab* ſont en 16 *aabb*, parce que *aabb* eſt le Produit de *ab* par lui-même, je trouve pour Quotient + 4 *ab*, & en multipliant par ce Quotient mon Diviſeur, j'ai pour Produit + 16 *aabb* + 64 *aabd* + 48 *abcd*, j'efface de mon Diviſé 16 *aabb*; & quant aux deux Grandeurs ſuivantes + 64 *aabd* + 48 *abcd*, qui ne ſe trouvent pas dans le Diviſé, je conjecture qu'elles ont été évanoüies par des contraires, & pour m'en aſſurer je les marque à part.

+ 64 *aabd* + 48 *abcd*.

Et je continuë ma Diviſion, en demandant combien de fois + 16 *ad* eſt en — 256 *aadd*, j'ai pour Quotient — 16 *ad*, & en multipliant par ce Quotient mon Diviſeur, j'ai — 64 *aabd* — 256 *aadd* — 192 *acdd*.

La Premiere de ces Grandeurs s'évanoüit, jointe à la premiere de celles que j'avois écrit à part. La Seconde ſe trouve toute entiere dans le Diviſé & s'efface : la Troiſiéme ſouſtraite de — 384 *acdd*, laiſſe pour reſte — 192 *acdd*.

Enfin, je demande combien + 12 *cd* ſont en — 144 *ccdd*, & je trouve — 12 *cd* pour Quotient & pour Produit — 48 *abcd* — 192 *acdd* — 144 *ccdd*. La Premiere de ces Grandeurs s'évanoüit avec la Seconde de celles que j'avois marquées à part, & les deux ſuivantes ſe trouvent préciſément dans ce qui me reſtoit de mon Diviſeur.

Diviſeur commun.

On s'exercera à la Diviſion en cherchant le plus grand Diviſeur commun de deux Grandeurs.

On en a démontré la méthode dans l'Arithmetique, par rapport aux Nombres : Celle qui cherche ce Diviſeur dans les Grandeurs Litterales eſt

Digitized by Google

établie ſur les mêmes principes.

Je diviſe $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 + a + b$.

Par $aa + 2ab + bb$.

Il me reſte $a + b$.

Par ce Reſte je diviſe le Diviſeur, & la Diviſion eſt exacte. Donc $a+b$, premier Diviſeur exact, eſt le plus grand Diviſeur commun.

18. Si j'avois eu $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 + aa - bb$. Second Exemple.

En comparant le Reſte $aa - bb$ avec le Diviſeur $aa + 2ab + bb$, je me ſerois apperçû que chacun peut ſe diviſer exactement par $a + b$. Ainſi $a + b$ diviſant $aa + 2ab + bb$, & outre cela $aa - bb$, il diviſera $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, qui ſe diviſe exactement par $aa + 2ab + bb$, & le reſte $aa - bb$.

Si j'avois eu $2a^3 + 6aab + 6abb + 2b^3 + 2aa - 2bb$, & pour Diviſeur $2aa + 4ab + 2bb$.

En diviſant chaque terme par 2, j'aurois eu comme auparavant, $a+b$ pour premier & plus grand commun Diviſeur; mais comme les Quantitez qu'il a à diviſer ſont doublées, on peut le doubler.

Et ſi j'avois eu $3a^3 + 9aab$, &c. d'un côté & de l'autre $3aa + 6ab$, &c. j'aurois trouvé un Diviſeur Commun triple.

19. Mais ſi aïant d'un côté $a^3 + 3aab$, &c. Troiſiéme.

J'avois de l'autre $2aa + 4ab + 2bb$.

Pour plus grande commodité, je diviſerois chaque Grandeur de $2aa$, &c. par 2, bien aſſuré que le Diviſeur de $aa + 2ab$, &c. le ſeroit de ſon Multiple $2aa$, &c. Mais $2a + 2b$, pour être Diviſeur de $2aa + 4ab$, &c. ne le ſeroit pas de $a^3 + 3aab$, &c. & je me bornerois à $a + b$, Diviſeur de $aa + 2ab$, &c.

Quatriéme Exemple. 20. Si j'avois eu $6a^3 + 18aab + 18abb + 6b^3 + 6aa - 6bb$ d'un côté, & de l'autre $4aa + 8ab + 4bb$.

En diviſant par 2, pour plus grande commodité, j'aurois eu d'un côté $3a^3 + 9aab$, &c. & de l'autre $2aa + 4ab$, &c.

Le plus grand Commun Diviſeur de $3a^3$, &c. & de $2aa$, &c. n'auroit été que la moitié du Diviſeur Commun de $6a^3$ & de $4aa$.

Le Quotient de $\frac{3a^3}{2aa}$, c'eſt $\frac{3}{2}a$. Les Fractions ſont incommodes.

Je remarque donc que c'eſt tout un de multiplier $2aa$ par $\frac{3}{2}a$ Quotient de $\frac{3a^3}{2aa}$, & de multiplier $2aa$ par $\frac{6a^3}{2aa} = 3a$; car $2aa \times 3a = 6a^3$, & $2aa \times \frac{3}{2}a = 3a^3$. Or que j'ôte $3a^3$ de $3a^3$, &c. ou $6a^3$ de $6a^3$, &c. c'eſt la même choſe par rapport à ce qui reſtera; & c'eſt au Reſtant & non pas au Quotient que l'on fait attention.

Cinquiéme. 21. Quelquefois le Commun Diviſeur ſaute aux yeux.

Quand j'ai $bbx^3 + ccyxx + 3bbyy$
$-cc \quad +dd \quad -3cc$
$-2cd \quad +2cd \quad -6cd$
$-dd \quad -bb \quad -3dd$

Je vois d'abord que x^3, yxx & yy ſont des Grandeurs Litterales multipliées par les Grandeurs bb, cc, $2cd$, dd.

Je vois enſuite par le changement des Signes, que ſi x^3 eſt ſous le Signe $+$, yxx eſt ſous le Signe $-$.

Et comme dans le dernier membre chaque Coëf-

Digitized by Google

ficient eſt triple, je conclus que yy a pour Coëfficient 3.

Par conſequent j'ai pour Diviſeur $x^3 - yxx + 3yy$.

Les mêmes Quantitez préciſément diviſent

$$\begin{array}{lll} aax^3 & -aayxx & +3aayy \\ -bb & +bb & -3bb \\ +2bc & -2bc & +6bc \\ -cc & +cc & -3cc \end{array}$$

22. Si j'avois eu d'un côté Sixiéme.

$$A\begin{cases} +2aax^3 + 2aayxx \\ +2abx^3 + 2abyxx \end{cases}$$ & d'un autre

$$B\begin{cases} +aax^3 + aayxx \\ -bbx^3 - bbyxx \end{cases}$$

J'aurois d'abord vû que $x^3 + yxx$ eſt commun Diviſeur.

Et comme il n'eſt guéres moins évident que $2aa + 2ab$ ont avec $aa - bb$, $a + b$ pour Diviſeur Commun, je conclus que $ax^2 + ayxx + bx^2 + byxx$ eſt le plus grand Commun Diviſeur de A & de B.

Septiéme.

$$C\begin{cases} 23.\text{J'ai } x^7 - 4bx^6 + 3ccx^5 + 5b^3x^4y - 8bbcx^4 + 2bcx^4 + 8y^3x^3 \\ -32by^3xx + 24ccyx + 40by^4 \\ +6bc^3xx + 10b^4cyx \end{cases}$$

$$D\begin{cases} \&\text{ j'ai } x^6 - 3cx^5 + 2bx^4yy + 2bcx^3 + 8xxy^3 - 24cxy^3 \\ +16by^5 \qquad -6bccxx + 4bbcxyy \end{cases}$$

Si, pour trouver le Diviſeur Commun, je diviſe la premiere par la ſeconde, les Coëfficiens des x & des y feront naître des embaras a l'infini.

Je vois yy, y^4, y^5. De là je conjecture que y^5 pourroit bien être le Produit de y^3 par yy.

y^5 a pour Coëfficient $16b$ & yy a $2b$; car $4bb$ eſt $2b \times 2b$.

Si j'ai $8y^1$ & $2byy$, j'aurai $16by^3$.

Si j'ai $8y^1$, j'aurai $24cxy^3 = 3cx \times 8y^3$.

Voila déja $+2byy$ & $-3cx$ dans le Multiplié ou dans le Multipliant, parce que j'ai au Produit $+16by^3 - 24cxy^3$.

Puiſque j'ai $8xxy^3$, j'aurai encore au Multiplié xx.

Il faut donc que j'aïe au Multipliant x^4, puiſque j'ai x^6 au Produit.

Voila déja $x^6 - 3cx^5 + 2bx^4yy - 24cxy^3 + 16by^3 + 8xxy^3$; car ce dernier eſt le Produit de $xx \times 8y^3$.

Reſtent $2bcx^3 - 6bccxx + 4bbcxyy$.

Or aïant dans le Multiplié $2byy$, il faut que j'aïe $2bcx$ dans le Multipliant; & dès là j'ai $2bcx \times xx$, $2bcx \times -3cx$, & $2bcx \times 2byy$.

Après avoir trouvé que $x^4 + 8y^3 + 2bcx$ eſt Diviſeur de D, j'eſſaïe de diviſer C par le même Diviſeur, & ſi je réuſſis, j'ai leur Diviſeur Commun.

Huitiéme Exemple.

24. Si j'avois d'un côté $12x^3 - 48xx + 60x - 24$.

Et d'un autre $-48xx + 120x - 72$.

1°. Je diviſe chaque Membre par 12, & j'ai $x^3 - 4xx + 5x - 2$, & $4xx + 10x - 6$.

Quand j'aurai trouvé le Diviſeur Commun de ces deux Réduites, je le multiplierai par 12, & j'aurai celui des deux Premieres.

Avant que de diviſer x^3, &c. par $4xx$, &c. Pour plus grande commodité, je diviſe $4xx$, &c. par 2, & j'ai $2xx + 5x - 3$: & il eſt viſible que le plus grand Diviſeur Commun de x^3 & de $2xx$, le ſera auſſi de x^3 & de $4xx$, &c.

Le Quotient de $\frac{x^3}{-2xx}$ eſt $\frac{x}{-2}$.

Digitized by Google

Or $-2xxx \frac{x}{-2} = \frac{-2x^3}{-2} = x^3$ ôté de x^3, laiſſe le même reſte que $-2x^3$ ôté de $-2x^3$.

Ainſi pour éviter l'embaras des Fractions, je multiplie $x^3 - 4xx$, &c. par -2.

$\frac{-2x^3}{-2xx} = x$ & $2x^3 + 8xx - 10x + 4$ diminué de $-2xx + 5x - 3xx$, donne pour Reſte $3xx - 7x + 4$.

Je continuë la Diviſion & le Quotient $\frac{3xx}{-2xx} = \frac{3}{2}$ incommode, parce qu'il eſt une Fraction, m'engage à changer $3xx - 7x + 4$, en $-6xx + 14x - 8$.

$\frac{-6xx}{-2xx} = 3$. Si j'ôte $-6xx + 15x - 9$ de $-6xx + 14x - 8$, reſte $-x + 1$.

Par ce Reſte $-x + 1$ je diviſe le Diviſeur $-2xx + 5x - 3$

La Diviſion eſt exacte, car le Quotient $+2x - 3x$ donne $-2xx + 2x - 3$.
$-3x$

Ce premier Diviſeur exact $-x + 1$, je le multiplie par 12, & j'ai $-12x + 12$, le plus grand Diviſeur Commun des mes premieres Quantitez.

25. Il ſe trouve quelquefois des Fractions Litterales qu'on ſouhaite de réduire à de plus petits termes. Neuviéme.

Pour cet effet il faut chercher le plus grand Diviſeur Commun des deux termes.

J'ai $\frac{4a^3 - 16aa + 20a - 8}{-16aa + 40a - 24}$

Pour trouver leur Diviſeur Commun.

1°. J'eſſaïe de diviſer le Numerateur par le Denominateur.

2° Pour rendre cette Diviſion plus aiſée, je diviſe d'abord chaque terme par 4.

C'eſt-à-dire qu'en general on diviſe chaque terme par un Diviſeur Commun quand cela ſaute aux yeux, & j'ai $\frac{a^3 - 4aa + 5a - 2}{-4aa + 10a - 6}$

3°. Outre cela, je remarque que chaque terme du Denominateur peut ſe diviſer par 2.

Lorſque $10a = 4aa + 6$, ou $4aa = 10a - 6$, j'ai $4aa - 10a + 6 = 0$.

J'ai auſſi $10a - 4aa - 6 = 0$; & en diviſant chaque terme par 2, j'ai $5a = 2aa + 3$, ou $2aa = 5a - 3$: & par conſequent $2aa - 5a + 3 = 0$, j'ai auſſi $5a - 2aa - 3 = 0$.

On verra dans la ſuite que de tels cas ſont frequens.

Alors on ne change point la valeur d'un tel Denominateur par une pareille Diviſion.

J'ai donc $\frac{a^3 - 4aa + 5a - 2}{-2aa + 5a - 3}$

4°. Je diviſe d'abord le plus grand terme a^3, qui eſt la Puiſſance la plus élevée, par $-2aa$.

a^3 diviſé par aa, donne pour Quotient a; mais diviſé par $2aa$, le double de aa, il donnera $\frac{1}{2}a$.

5°. Pour éviter l'embaras de cette Fraction, je multiplie le Dividende par 2.

S'il eſt dans le cas du Denominateur, ſa valeur ne changera point par une telle Multiplication.

J'ai donc $2a^3 - 8aa + 10a - 4$ ($-a + 3$

$-2aa + 5a - 3$

6°. Après ces préparations, je dis le Quotient de $\frac{2a^3}{-2aa}$, c'eſt $-a$.

7°. Par ce Quotient je multiplie tous les termes du Diviſeur, & j'ai $+2a^3-5aa+3a$.

8°. Je fais la Souſtraction,

$$\begin{array}{r} 2a^3-8aa+10a-4 \\ -2a^3+5aa-3a \end{array} = -3aa+7a-4.$$

9°. Je continuë, le Quotient de $\frac{-3aa}{-2aa}$, c'eſt $+\frac{3}{2}$.

10°. Je fais donc une préparation ſemblable à celle que je viens de faire, & je change $-3aa+7a-4$ en $-6aa+14a-8$.

11°. Le Quotient de $\frac{-6aa}{-2aa}$, c'eſt $+3$. Par $+3$ je multiplie le Diviſeur $-2aa+5a-3$

$$\times +3$$

& j'ai $-6aa+15a-9$

12°. Je fais la Souſtraction,

$$\begin{array}{r} -6aa+14a-8 \\ +6aa-15a+9 \end{array} = -a+1.$$

13°. Par ce reſte $-a+1$ je diviſe mon Diviſeur $-2aa+5a-3$ ($+2a$

Le Quotient de $\frac{-2aa}{-a}$, c'eſt $+2a$.

14°. Par $+2a$ je multiplie $-a+1$

$$\times +2a$$

& j'ai $-2aa+2a$

J'ôte & j'ai $\begin{array}{r} -2aa+5aa-3 \\ +2aa-2a \end{array} = 3a-3$

Je continuë le Quotient de $\frac{3a}{-a}$, c'eſt -3.

Digitized by Google

Je multiplie $-a+1$ par -3, & j'ai $+3a-3$.

La Diviſion eſt exactement finie, & mon dernier Diviſeur exact c'eſt $-a+1$.

15°. Et dans le cas où les deux Dividendes s'égalent à zero, leurs Quotiens & leurs Communs Diviſeurs ſeront auſſi $=0$. Donc $-a+1=0$, & $a=1$. Donc $a-1=0$, & $a=-1=1-a$. On peut donc faire la Diviſion par celui qu'on voudra.

Mais 16°. on avoit diviſé les deux termes par 4; & par conſequent ſi on les rétablit comme auparavant, afin que $a-1$ ſoit le plus grand Diviſeur, il faut le changer en $4a-4$, & on aura

$$\frac{4a^3-16aa+20a-8}{-16aa+40a-24} = \frac{aa-3a+2}{-4a+6}$$

Dixiéme Exemple.

26. Ire. $a^4-4a^3b+16ab^3-16b^4=0$

IIe. $a^4-2a^3b-4aabb+8ab^3=0$

Ces deux Equations ſont l'une & l'autre $=0$. Il s'agit de trouver leur plus grand Diviſeur Commun, pour les réduire à leurs plus petites expreſſions.

I°. Puiſque $a^4-2a^3b-4aabb+8ab^3=0$. Donc $a^4=2a^3b+4aabb-8ab^3$.

II°. Je mets cette valeur de a^4 dans la I. Equation,

$$\begin{array}{l} \text{\& j'ai} \quad -4a^3b+16ab^3 \\ \qquad\quad +2a^3b-8ab^3-16b^4+4aabb \\ \hline -2a^3b+8ab^3-16b^4+4aabb=0. \end{array}$$

III°. Aïant une telle valeur de la Premiere, ce qui ſera le Diviſeur de $-2a^3b$, &c. diviſera la Premiere.

IV°. Je voudrois auſſi faire une ſubſtitution ſemblable dans la Seconde, & pour cet effet,

1°. Je diviſe chaque Terme par $2b$, afin d'a-

Digitized by Google

voir a, dégagé du Coëfficient dans le premier Terme, & j'ai $-a^3+4abb-8b^3+2aab$.

2°. Afin de pouvoir ſubſtituer à la place de a^4, je change $-a^3$ en $-a^4$, & j'ai $-a^4+4aabb-8ab^3+2a^3b=0$. Donc $a^4=2a^3b+4aabb-8ab^3$.

V°. Je ſubſtituë cette valeur de a^4 dans la II. Equation, & j'ai $-2a^3b-4aabb+8ab^3=0$.
$+2a^3b+4aabb-8ab^3=0$,

Ainſi la Seconde Equation eſt compoſée de deux Parties, chacune égales à $2a^3b+4aabb-8ab^3$.

VI°. Or $-a^3+4abb-8b^3+2aab$ dont cette derniere Grandeur eſt provenuë, la diviſera; c'eſt-à-dire, diviſera les deux Parties de la II. Equation.

Mais il diviſe auſſi la I. ou ſa valeur $-2a^3b$, &c. car il eſt provenu de là en ſe diviſant par $2b$.

En effet la I. diviſée par $-a^3+4abb-8ab^3+2a^3b=0$, donnera pour Quotient $-a+2b$; & le Quotient de la ſeconde ſera $-a$.

On peut ſe trouver obligé de réïterer les ſubſtitutions dans de nouvelles Equations qui naiſſent: mais la derniere Equation, qui, préparée par des Diviſions (comme nous avons diviſé $-2a^3b$ par $2b$) & élevée autant que la ſubſtitution le demande, fera évanoüir tous les Termes par des Signes contraires: l'Equation, dis-je, qui aura donné lieu à cette derniere operation, après avoir dégagé ſon premier Terme de Coëfficient ſera le Diviſeur des deux, comme ici $-a^3+4abb$, &c.

27. J'ai $a^3bc-a^3bd+aacgh-aadgh$, & $abcd-abdd+cdgh-ddgh$. Onziéme.

Je leur cherche un Diviſeur commun & le plus grand.

Digitized by Google

Si la ſeconde diviſoit exactement la premiere, elle ſeroit ce Diviſeur.

J'eſſaïe, & je dis le Quotient de $a^3\,b\,c$ diviſé par $a\,b\,c\,d$, c'eſt $\frac{a\,a}{d}$.

Si j'avois eu ſimplement $a\,a$, & au lieu de $a\,b\,c\,d$, $a\,b\,c$, & ſi chaque Terme de ma ſeconde Grandeur Complexe avoit été diminuée de même, j'aurois eu $a\,b\,c - a\,b\,d + c\,g\,h - d\,g\,h$, Diviſeur de lui-même & de la Somme Superieure $a^3\,b\,c$, &c.

Quand donc j'ai un Quotient fractionné $\frac{a\,a}{d}$, dès que je commence la Diviſion, je n'ai qu'à voir ſi le Denominateur diviſe chaque Terme du Diviſeur Complexe, je le diviſe par d.

Dès là j'ai $a\,b\,c - a\,b\,d$, &c: & ſi $a\,b\,c - a\,b\,d$, &c. $\times\, a\,a = a^3\,b\,c - a^3\,b\,d$, &c., j'ai trouvé en $a\,b\,c - a\,b\,d$, &c. le plus grand Diviſeur commun.

Quand il y a des Reſtes on opere avec ces Reſtes & le Diviſeur; mais alors les Operations deviennent compliquées, & cette Méthode perd ſon utilité.

Remarque ſur les Reſtes.

28. Telles Grandeurs, qui, diviſées l'une par l'autre, ne laiſſeroient aucun reſte, ſi elles eſtoient exprimées en nombres, peuvent être marquées par de telles Lettres, qu'elles laiſſeroient de longues Fractions, qui évaluées, ſe réduiſent à de fort petits Termes.

Si je diviſois $x^4 + c\,x^3 + m\,x^2 + p\,x + q$
$- 2n\,x^3 - 2d\,x^2 - 2c\,d\,x - 2d\,m$
$- 2c\,n\,x^2 + 4n\,d\,x + 2d\,d$
$+ 2n\,m\,x^2 - 2n\,m\,x + 2n\,d\,c$
$+ 2n\,n\,c\,x - 2n\,n\,d$
$- 2n^3\,x$

Par $x^2 - n\,x - d$,

Digitized by Google

j'aurois pour Quotient $x^2 + cx + m - nx - d - nc + nn$

& pour Reste $\frac{p - cd + nd - nm + nnc - n^3 \times x + q - dm + dd + ndc - nnd}{x^2 - nx - d}$

Si les indeterminées c, d, m, n, p, q, & l'inconnuë x, viennent à s'exprimer par des nombres qui aïent un Diviseur commun, comme 4, 8, 16, &c. On pourra réduire aisément la Fraction à de petits Termes.

29. Si j'ai à diviser b par $a + c$, j'exprimerai ainsi le Quotient $\frac{b}{a+c}$, car $\frac{b}{a+c} \times a + c = b$; le Quotient multiplié par le Diviseur, égale le Dividende. Autre Remarque.

Mais on peut aussi dire : b divisé par a, donne pour Quotient $\frac{b}{a}$. Je multiplie ce Quotient $\frac{b}{a}$ par le Diviseur $a + c$, & j'ai $\frac{ba}{a} + \frac{bc}{a}$. J'ôte ce Produit du Dividende b, il me reste $-\frac{bc}{a}$; car $\frac{ba}{a} = b$.

Ce reste $-\frac{bc}{a}$, je continuë à le diviser, & $-\frac{bc}{a}$ divisé par a, c'est $-\frac{bc}{aa}$. Ce Quotient je le multiplie par le Diviseur $a + c$, & j'ai $-\frac{abc}{aa} - \frac{bcc}{aa}$: j'ôte ce Produit de $-\frac{bc}{a}$, & il me reste $+\frac{bcc}{aa}$.

Digitized by Google

J'ai donc déja deux Quotiens $\frac{b}{a} - \frac{bc}{aa}$.

Le Reſte $+\frac{bcc}{aa}$, je continuë à le diviſer par $a+c$ & primo par a, & j'ai pour Quotient $3^e + \frac{bcc}{a^3}$.

Je multiplie ce Quotient par $a+c$, & j'ai $\frac{+bcca}{a^3} + \frac{bc^3}{a^3} = +\frac{bcc}{aa} + \frac{bc^3}{a^3}$.

J'ôte ce Produit du Reſte $+\frac{bcc}{aa}$, & j'ai pour Reſte $-\frac{bc^3}{a^3}$.

On peut ainſi pouſſer la Diviſion à l'infini, & on aura pour Quotient de b, diviſé par $a+c$ $\frac{b}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5}$, &c.

C'eſt-à-dire une ſuite de Fractions dont le Numerateur ſera $b \times 1$. $b \times c$. $b \times cc$. $b \times c^3$, &c. c'eſt-à-dire le Dividende multiplié par le ſecond Terme du Diviſeur & ſes Puiſſances. Le Denominateur ſera le premier Terme du Diviſeur & ſes Puiſſances & ſes Signes ſeront alternativement $+$ & $-$.

Si après avoir pouſſé juſqu'à un certain point cette Operation, elle ſervoit à découvrir la valeur de b, de a & de c, elle auroit ſon uſage; mais ne contribuant point à cette découverte, cette Operation ſe réduit à une ſpeculation inutile.

On peut donner des valeurs à ces Lettres, & faire paſſer ſous les yeux cette ſuite ennuieuſe d'une maniere plus déterminée; mais pour ſon peu d'uſage, c'eſt aſſez d'avoir fait comprendre en quoi

Digitized by Google

elle consiste. Un Diviseur est trop grand ; car $\frac{b}{a}$ est plus grand que $\frac{b}{a+c}$, on en retranche $\frac{bc}{aa}$, c'est trop retrancher, car $\frac{b}{a} - \frac{bc}{aa}$ est plus petit que $\frac{b}{a+c}$; il faut donc y ajoûter $+\frac{bcc}{a^3}$, c'est trop, &c.

Par exemple $b = 2$. $a = 4$. $c = 3$.

J'aurai $\frac{2}{4} - \frac{2 \times 3}{16} + \frac{2 \times 9}{64} - \frac{2 \times 27}{256} + \frac{2 \times 81}{1024}$,

ou $\frac{2}{4} - \frac{6}{16} + \frac{16}{64} - \frac{54}{256} + \frac{162}{1024}$,

ou $\frac{512}{1024} - \frac{388}{1024} + \frac{288}{1024} - \frac{216}{1024} + \frac{162}{1024}$.

Les 2 premiers donnent $\frac{128}{1024}$: Les 3 premiers $\frac{412}{1024}$: Les 4 donnent $\frac{196}{1024}$: Les 5 $\frac{358}{1024}$.

$\frac{b}{a+c} = \frac{2}{4+3} = \frac{358}{1253}$; il y a donc trop, & il faut continuer à retrancher.

C'est un jeu qui exerce pour exercer : mais on en pourra trouver une infinité de cette nature, dont tout l'usage se réduira à amuser.

Si on fait $b = 1$. $a = 2$. $c = 1$. $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$, en approchant ou aura $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$, ou $\frac{64}{128} - \frac{32}{128} + \frac{16}{128} - \frac{8}{128} + \frac{4}{128} - \frac{2}{128} + \frac{1}{128}$; c'est-à-dire on aura $\frac{32}{128}, \frac{48}{128}, \frac{40}{128}, \frac{44}{128}, \frac{42}{128}, \frac{43}{128}$.

$\frac{40}{128}$ feroit $= \frac{1}{3}$: Donc on a eu trop & trop peu.

Digitized by Google

Dans cet Exemple on voit plus aiſément l'aproximation exprimée en Quantitez déterminées.

Trouver tous les Diviſeurs entiers d'un Nombre.

30. Pour trouver tous les Diviſeurs d'un Nombre (840) 1°. Je le diviſe par 1, & j'ai 840. 2°. Par 2, & j'ai 420 : Celui-ci encore par 2, & j'ai 210. $\frac{210}{2} = 105$.

J'ai donc 1. 840. 420. 210. 105.

Mais je commence par me borner aux ſimples qui n'ont de commun Diviſeur que l'unité.

J'ai donc 1, 2, 2, 2,

$\frac{105}{3} = 35$. $\frac{35}{5} = 7$.

J'ai donc 1. 2. 2. 2. 3. 5. 7.

Mon dernier Quotient 7 ne peut plus ſe diviſer par aucun Nombre ſimple.

Je range les Diviſeurs ſimples en une Colomne perpendiculaire l'un ſous l'autre.

1 2 10 14 70
2 4 12 20. 60. 28. 84. 140. 420
2 8 24 40. 120. 56. 168. 280. 840
2 6 30 42. 210.
3 15
5 35
7

Puis je dis $2 \times 1 = 2$. $2 \times 2 = 4$. $2 \times 4 = 8$.

Après avoir achevé la combinaiſon de 2, je viens à 3, & je dis $3 \times 2 = 6$. $3 \times 4 = 12$. $3 \times 8 = 24$.

Je paſſe à 5. $5 \times 3 = 15$. $5 \times 2 = 10$. $5 \times 4 = 20$. $5 \times 6 = 30$. $5 \times 12 = 60$. $5 \times 8 = 40$. $5 \times 24 = 120$.

Je viens à 7. $7 \times 5 = 35$. $7 \times 2 = 14$. $7 \times 10 = 70$. $7 \times 4 = 28$. $7 \times 12 = 84$. $7 \times 20 = 140$. $7 \times 60 = 420$. $7 \times 8 = 56$.

7×24

$7 \times 24 = 168$. $7 \times 40 = 280$. $7 \times 120 = 840$. $7 \times 6 = 42$. $7 \times 30 = 210$. $7 \times 15 = 105$.

31. Pour trouver tous les Diviſeurs exacts de $a^4 bcdd + a^3 bbcdd + a^4 bd^3 + a^3 bbd$, je diviſe par a, & le Quotient encore par a, & celui-ci encore par a.

D'une Grandeur Litterale.

Le IVe Quotient je le diviſe par b.

Le Ve par d, le VIe par d, le VIIe par $a + b$, le VIIIe par $c + d$.

J'ai donc 1, a, a, a, b, d, d, $a + b$, $c + d$

1 a. ad. add. $aa + ab$. $ac + ad$. $aad + adb$. $aadd + abdd$. $acd + add$. $aac + abc + aad + abd$, &c.

a aa. aab. aad. $aadd$. $a^3 + aab$. $a^3 b + aabb$. $a^3 d + aabd$. $a^3 dd + aabdd$. $aac + aad$, &c.

a a^3. $a^3 b$. $a^3 d$. $a^3 dd$. $a^3 bd$. $a^3 bdd$. $a^4 + a^3 b$. $a^4 b + a^3 bb$ $a^4 d + a^3 bd$. $a^4 dd + a^3 bdd$. $a^4 bd + a^3 bbd$. $a^4 bdd + a^3 bbd d$. $a^3 c + a^3 d$, &c.

a ab. abd. $abdd$. $aab + abb$. $aabd + abbd$. $aabdd + abbdd$. $abc + abd$, &c.

b bd. $ab + bb$. $bc + bd$. $abd + bbd$. $bcd + bdd$. $abcd + bbcd + abdd + bbdd$.

d dd. $add + bdd$. $cdd + d^3$. $acdd + bcdd + ad^3 + bd^3$.

d $ad + bd$. $dc + dd$. $adc + bcd + add + bdd$.

$a + b$. $ac + bc + ad + bd$.

$c + d$.

Je multiplie 1 par a $a \times a$, $aa \times a$.

Le 3e a par b, puis $b \times d$. Puis $d \times d$. Puis $d \times a + b$. Puis $a + b \times c + d$.

Par b je multiplie aa & a^3, mais non pas ab, parce que ab eſt déja le Produit de a par b.

Digitized by Google

Par le premier d je multiplie tout ce qui eſt au-deſſus de lui.

Par le ſecond d, j'en fais de même, excepté que je ne multiplie pas $d\,d$, déja provenu de $d \times d$.

Par $a \times b$ je multiplie tout ce qui eſt au-deſſus, à l'exception de $a\,d + b\,d$, qui eſt déja $d \times a + b$.

Par $c + d$ je multiplie encore tout ce qui eſt au-deſſus, à l'exception de $a\,c + b\,c + a\,d + b\,d$.

On s'exercera à faire des Diviſions en ſe ſervant de tous ces Diviſeurs, & de ceux-là même qui ne ſont marquez que par un *&c.* comme $a^4\,b\,c\,d\,d + a^4\,b\,d^3 + a^3\,b\,b\,c\,d\,d + a^3\,b\,b\,d^3$, qui eſt le Dividende lui-même.

On peut ſoi-même s'en donner des Exemples, en faiſant naître, par divers degrez, un Produit de differentes Multiplications.

CHAPITRE VI.

Des Quarrez.

Définition. 1. LOrſque la même Grandeur eſt le Multiplié & le Multipliant, le Produit qui ſe forme par cette Multiplication d'une Grandeur par elle-même, s'appelle *Quarré*; & cette Grandeur qui le produit en ſe multipliant, s'appelle ſa Racine. Ainſi b eſt la Racine de $b\,b$, $b\,c$ la Racine de $b\,b\,c\,c$.

Parties d'un Quarré Complexe. 2. Lorſqu'une Racine eſt compoſée de pluſieurs Grandeurs jointes par les Signes $+$ ou $-$, le Quarré qui en eſt le Produit, contient 1°. le Quarré de la premiere Partie. 2°. Deux Produits de la premiere par la ſeconde, & enfin le Quarré de la ſeconde.

Digitized by Google

Pour le prouver, j'appelle la premiere Grandeur a, & la ſeconde b, par conſequent leur Somme eſt $a+b$; je multiplie cette Grandeur Complexe par elle-même.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+bb \\ +ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

Et j'ai le Produit $aa+2ab+bb$, qui contient les conditions propoſées. Je ſuis aſſuré qu'il en ſera toûjours ainſi, parce que toutes les fois que l'on me donnera deux Racines, quelles qu'elles ſoient, il eſt certain que je pourrai repreſenter la premiere par a, & la ſeconde par b; & par conſequent le Produit de ces 2 Racines par elles-mêmes ſera repreſenté au juſte, par le Produit de $a+b$ par $a+b$; de ſorte que comme $a+b$ eſt une expreſſion univerſelle de deux Racines, le Produit $aa+2ab+bb$ eſt une expreſſion univerſelle du Quarré de deux Racines.

3. Que ſi au lieu de deux Grandeurs l'on en a un Nombre ſi grand que l'on voudra, le Quarré produit de toutes ces Grandeurs multipliées par elles-mêmes, contiendra le Quarré de chaque partie, & outre cela 2 Produits de la premiere par chacune de toutes les ſuivantes, & de même deux Produits de la ſeconde par toutes celles qui la ſuivent, & ainſi de ſuite juſques à la penultiéme, dont on aura auſſi deux Produits par la derniere. Quelles que ſoient ſes Racines.

Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier $a+b+c$; car dès que l'on me donnera 3 Grandeurs quelles qu'elles ſoient, je pourrai appeller

la premiere a, la ſeconde b & la troiſiéme c ; & ce que je trouverai en multipliant la Grandeur Complexe $a+b+c$ par elle-même ſera applicable à la multiplication de 3 Grandeurs par elles-mêmes quelles qu'elles ſoient.

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac+bb+bc+ce \\ \quad +ab+ac \qquad +bc \\ \hline aa+2ab+2ac+bb+2bc+ce \end{array}$$

De même ſi je multiplie

$$a+b+c+d$$

par $a+b+c+d$

$$\begin{array}{l} aa+ab+ac+ad+bb+bc+bd+cc+cd+dd \\ \quad +ab+ac+ad \qquad +bc+bd \qquad +cd \end{array}$$

j'aurai $aa+2ab+2ac+2ad+bb+2bc+2bd+cc$ $+2cd+dd$.

4. Cela ſe démontre donc évidemment en donnant à chaque Grandeur le nom d'une Lettre ; car que l'on ait tel Nombre que l'on voudra, de quelles parties qu'on le conçoive compoſé, chacune de ſes parties aura pour ſon nom une Lettre ; & ce qui ſera verifié de ce Nombre diviſé en autant de parties, & exprimé par autant de Lettres, ſera également vrai de tout autre, puiſqu'il n'y en a point qu'on ne puiſſe diviſer de la même maniere, & exprimer par les mêmes Lettres ; & c'eſt là un des avantages de l'Algebre, de rendre ainſi ſes Démonſtrations Univerſelles.

Je puis diviſer 324 en $300+20+4$, & faire $300=a$, $20=b$, $4=c$.

Je puis le diviſer en $320+4$, & faire $320=d$ & $4=c$.

Digitized by Google

Je puis le diviſer en 300 + 24, en 180 + 120 + 20 + 4, & faire 180 = *a*, 120 = *b*, 20 = *c*, 4 = *d*. Et tout ce que le Produit de ces Lettres me découvrira en general, ſera applicable aux parties de 324, & deſignées par ces Lettres, & aux parties de tout autre Nombre deſignées de la même façon, parce que les expreſſions dont elle ſe ſert s'appliquent à une infinité de ſujets.

5. Puiſqu'il n'y a aucun Nombre que l'on ne puiſſe diviſer en deux parties, l'on pourra toûjours appeller la premiere *a* & la ſeconde *b*. Lors donc que l'on a une Racine en nombre compoſée de trois Colomnes & davantage, l'on peut regarder les 2 premieres de la gauche comme un ſeul tout, auquel on donne le nom de *a*, & la 3e prend celui de *b*. Voila pourquoi leur Produit & leur Quarré contiendra le Quarré des deux premieres : le Quarré de la 3e & deux Produits de cette 3e par la ſomme des deux premieres.

Tout Quarré peut être conçû compoſé de deux Racines.

Si j'ai *a* + *b* + *c*, je fais d'abord *a* + *b* = *d*, & par conſequent *a* + *b* + *c* = *d* + *c*, & le Quarré des 3 premieres eſt égal au Quarré des 2 ſecondes : parconſequent le Quarré de *a* + *b* + *c*. = *d d* + 2 *c d* + *c c*. De même encore le Quarré de *a* + *b* + *c* + *d* ſera égal au Quarré de *f* + *d*, ſi j'ai fait *a* + *b* + *c* = *f*.

Ainſi le Quarré de 243 peut être regardé comme un compoſé de 2 Racines, dont la premiere ſera 240 = *a* & la ſeconde 3 = *b*.

Ce Quarré de 240, c'eſt	57600
2 Produits de 240 par 3, font . . .	1440
le Quarré de 3, c'eſt	9
donc le Quarré de 243, ſera . . .	59049

6. De même en regardant les 3 premieres com-

me un ſeul tout, on l'appellera encore *a*, tandis que la 4e ſera appellée *b*, & leur Quarré contiendra, outre le Quarré de la ſomme des 3 premieres, le Quarré de la 4e & deux produits de cette 4e par la ſomme des 3 premieres.

Extraction. 7. Pour tirer la Racine quarrée d'un Nombre, on le partage en pluſieurs Tranches, en commençant de la droite à la gauche, & chaque Tranche contient deux Colomnes, hormis la derniere à la gauche, qui quelquefois n'en contient qu'une.

8. Le Quarré du dernier Nombre de la Racine que l'on cherche, ſe trouvera dans la premiere Tranche de la droite; car le Quarré de 9, qui eſt le plus grand nombre des ſimples unitez, ne peut s'étendre qu'à deux Colomnes.

9. Le Quarré du Nombre ſuivant, qui contient des dixaines, commence à la troiſiéme Colomne, & par conſequent à la ſeconde Tranche; car des dixaines multipliant des dixaines produiſent des centaines; & comme 90, la plus haute dixaine ne peut produire que 81 centaines, en ſe multipliant lui-même, c'eſt-à-dire 8100, il eſt viſible que le Quarré du ſecond Nombre de la droite n'excedera pas la ſeconde Tranche.

10. L'on prouvera de même que le Quarré de chaque Nombre a ſa Tranche aſſignée : au troiſiéme répond la troiſiéme, au cinquiéme la cinquiéme.

11. On cherche donc premierement le Quarré le plus approchant du Nombre contenu dans la premiere Tranche de la gauche, & ce Quarré on l'ôte de ce Nombre.

12. Ce Quarré vaut *aa*, il s'agit de trouver 2 *ab*. Pour cet effet on double la Racine du Quarré, laquelle vaut *a*; & diviſant par cette Racine

Digitized by Google

doublée, le Nombre qui ſuit, en avançant d'une Colomne vers la droite, l'on a pour Quotient la ſeconde Racine; car ſi l'on diviſe $2ab$ par $2a$, l'on a pour Quotient b. On quarre cette ſeconde Racine, on ajoûte ce Quarré au double Produit de la ſeconde par la premiere, en avançant toûjours d'une Colomne vers la droite, & cette ſomme on l'ôte de la ſeconde Tranche & de ce qui precede dans la premiere.

13. On double la Somme des deux premieres Racines que l'on conſidere comme un ſeul a, & faiſant par cette Somme doublée qui eſt $2a$, une Diviſion, en avançant encore d'une Colomne vers la droite, l'on a pour Quotient le troiſiéme Nombre de la Racine, que l'on appelle derechef b; on le quarre; on ajoûte ce Quarré au Produit de la double Somme des deux premieres par la troiſiéme, & l'on ſouſtrait cette Somme de la troiſiéme Tranche & de ce qui la precede.

14. On double la Somme des trois premieres; on fait par cette Somme doublée une Diviſion, & on a le quatriéme Nombre de la Racine. On opere avec ce quatriéme & les trois premiers pour la quatriéme Tranche, comme on avoit fait avec la troiſiéme & les deux premiers pour la troiſiéme Tranche, & ainſi de ſuite.

15. Si je multiplie 6789 par lui-même, j'ai pour Produit 46090521, & ce Produit eſt le Quarré de 6789. Diviſons-le en Tranches, de deux en deux Colomnes, en commençant par la droite, & rendons-nous attentifs à ſa formation. Exemples.

1°. J'ai multiplié 9 par 9, & le Quarré 81 n'a pas excedé la premiere Tranche.

2°. J'ai multiplié 8 par 8, & comme le Pro-

				6	7	8	9	
				6	7	8	9	
3	6	4	9	6	4	8	1	
					7	2		
					7	2		
				6	3			
				6	3			
			5	4				
			5	4				
			5	6				
			5	6				
		4	8					
		4	8					
	4	2						
	4	2						
4	6	0	9	0	5	2	1	

duit de 9 par 8 a commencé à la ſeconde Colomne, le Produit de 8 par 8 commence à la troiſiéme, & ne pouvant être que de deux Colomnes, il n'excede pas la ſeconde Tranche.

3°. Je multiplie 7 par 7, & comme le Produit de 9 par 7 commence à la troiſiéme Colomne, & le Produit de 8 par 7 à la quatriéme, le Produit de 7 par 7 commencera à la ſixiéme Colomne, & par conſequent à la troiſiéme Tranche, laquelle il n'excedera pas.

				6	7	8	9	
				6	7	8	9	
			6	1	1	0	1	
		5	4	3	1	2		
	4	7	5	2	3			
4	0	7	3	4				
4	6	0	9	0	5	2	1	

4°. De même le Produit de 6 par 6 commencera à la ſeptiéme Colomne, parce que le Produit de 9 par 6 commence à la quatriéme, celui de 8 par 6 à la cinquiéme & celui de 7 par 6 à la ſixiéme.

On voit donc par là que chaque Tranche contient le Quarré d'une Racine. La premiere Tranche contient le Quarré du Nombre qui n'exprime que des Unitez; la ſeconde Tranche contient le Quarré du Nombre qui marque les Dixaines; la troiſiéme contient le Quarré du Nombre qui marque les Centaines, & la quatriéme renferme le Quarré de la Racine qui exprime les milles. Chacun de ces Quarrez eſt préciſément contenu dans ſa Tranche, ſans s'étendre ni à la précedente ni à la ſuivante: cha-

Digitized by Google

que Tranche contient à la verité quelque choſe de plus que ces Quarrez-là, comme nous le verrons bien-tôt.

Si le Quarré de la Racine totale 6789, n'étoit compoſé que de 4 Quarrez, dont nous venons d'expliquer la generation & de marquer les places, il ne ſeroit pas neceſſaire de rien ajoûter pour faire comprendre la formation d'un Quarré par la multiplication de ſes Racines; & pour découvrir la Racine d'un Quarré tout formé, il n'y auroit qu'à écrire par ordre la Racine quarrée de la premiere Tranche, la Racine de la ſeconde, &c.

Mais en multipliant 6789, il eſt évident que je ne multiplie pas ſeulement 9 par 9 & 8 par 8, &c. mais de plus 8 par 9, par 7, & enſuite 6 par 7 & 8, &c. En un mot, non ſeulement chaque Colomne ſe multiplie par elle-même, mais de plus chaque Colomne eſt multipliée par toutes les autres; de ſorte que le Quarré total qui reſulte d'une telle Multiplication, renferme non ſeulement les Quarrez de chaque Colomne, il renferme encore pluſieurs Plans de chaque Colomne multipliée par les autres. Il faut ſe rendre attentif ſur la formation de ces Plans & la place de chacun d'eux.

Nous appellerons donc *Premiere* la Tranche qui eſt le plus à la gauche, & *Derniere* celle qui eſt le plus à la droite : & de même, nous appellerons Premiere Racine celle auſſi qui eſt le plus à la gauche, & qui par là eſt d'une plus grande valeur.

Comme le Quarré de la premiere Colomne ou de la premiere Racine, eſt le dernier Produit qui ſe forme, il ſe trouve placé auſſi le plus à la gauche,

Digitized by Google

& par conſequent il commence à la premiere Colomne de la premiere Tranche & finit à la ſeconde, quand il y en a deux ; mais le Produit de la premiere Colomne, par la ſeconde, eſt plus reculé d'une Colomne, & par conſequent commence à la premiere Colomne de la ſeconde Tranche, pour s'avancer de là dans la premiere Tranche, s'il eſt aſſez grand pour remplir plus d'une Colomne.

Or dans le même rang où l'on doit placer le Produit de la premiere Colomne, par la ſeconde, dans ce même rang il faut auſſi placer le Produit de la ſeconde, par la premiere, car ils ſont de même valeur ; comme un Produit de la premiere par la ſeconde & un Produit de la ſeconde par la premiere, c'eſt la même choſe que deux Produits de la premiere par la ſeconde.

Par exemple, un Produit de 6 par 7 & un Produit de 7 par 6, c'eſt la même choſe que deux Produits de 6 par 7.

Il eſt manifeſte qu'à la premere Colomne de la ſeconde Tranche, commenceront deux Produits de la premiere Racine par la ſeconde, pour ſe répandre de là dans la premiere Tranche ; ou ce qui revient au même, (mais eſt plus commode pour la pratique & en facilite davantage l'intelligence) à la premiere Colomne de la ſeconde Tranche, commence le Produit du double de la premiere Racine par la ſeconde Racine. Et ainſi il faudra chercher dans les deux premieres Tranches. 1°. Le Quarré de la premiere Racine, 2°. (& dans une Colomne enſuite) ce Produit du double de la premiere Racine par la ſeconde Racine. 3°. Auſſi dans une Colomne ſuivante, en allant à la droite, le Quarré de la ſeconde Racine : ainſi j'ajoûterai

Digitized by Google

à 36 le Quarré le plus approchant du nombre 46 de la premiere Tranche,

36
Je lui ajoûterai 84 Produit de 12, double de la Rac. 6 par 7, & 49 Quarré de la Racine 7, & leur ſomme 4489, je l'ôterai des deux premieres Tranches de mon Quarré total & il me reſtera 120.

4 6	0 9	0 5	2 1	
3 6				
1 0	0 9			
4 4 8 9				
1 2 0	0 5			
1 0 7	8 4			
1 2	2 1	2 1		

Pour découvrir cette ſeconde Racine 7, après avoir trouvé que 6 eſt la Racine de 36, le Quarré le plus près d'être contenu dans les Nombres de la premiere Tranche, & après avoir ôté 36 de 46, (ce qui me donne pour la premiere Tranche le reſidu 10,) je double 6; & parce que le double Produit de 6 = 12, par la ſeconde Racine, commence à la premiere Colomne de la ſeconde Tranche, & ſe répand dans le reſidu de la premiere, je cherche combien de fois 12 eſt dans le Produit 100, je trouve 8 pour Quotient; mais parce que le Produit 12 par 8, joint au Quarré de 8 & au Quarré de 6, ſuivant la Methode de l'Article precedent, me donne 4624, ſomme plus grande que les Nombres des deux premieres Tranches; au lieu de la Racine 8, je vois qu'il faut deſcendre à la Racine 7: & ſi en deſcendant ainſi d'une unité, la Somme (comme il arrive quelquefois) de ces 3 parties qui doivent être renfermées dans les deux premieres Tranches, ſurpaſſe le Nombre de ces deux Tranches, il faudra derechef deſcendre à une Racine inferieure d'une unité.

Digitized by Google

Nous venons de voir que les deux premieres Tranches renferment, 1°. Le Quarré de la premiere Racine. 2°. Le Produit du double de la premiere Racine, par la ſeconde Racine. 3°. Le Quarré de la ſeconde; & après avoir ôté ces trois ſommes des deux premieres Tranches, il nous reſtera 120.

Puiſque le Quarré de la ſeconde Racine commence à la ſeconde Colomne de la ſeconde Tranche, il s'enſuit que le Produit de cette ſeconde Racine, par la troiſiéme, commencera dans une Colomne immediatement ſuivante, du côté de la droite; & dans la même Colomne où l'on doit placer le Produit de la ſeconde Racine, par la troiſiéme, il faut placer le Produit de la troiſiéme par la ſeconde, puiſque ces deux Produits ſont le même; par conſequent à la premiere Colomne de la troiſiéme Tranche, commencera le Produit de la ſeconde Racine doublée, par la troiſiéme. Ce Produit s'avancera depuis cette Colomne vers les Tranches precedentes, & ces Tranches contiendront encore le Produit de la premiere Racine, par la troiſiéme, & le Produit de la troiſiéme par la premiere; ou ce qui revient au même, le Produit du double de la premiere par la troiſiéme; & ainſi depuis la premiere Colomne de la troiſiéme Tranche, en avançant à la gauche ſe trouvera le Produit du double des deux premieres Racines, par la troiſiéme. Donc après avoir ôté des deux premieres Tranches le Quarré des deux premieres Racines, ſi l'on joint à ce qui reſtera la premiere Colomne de la troiſiéme Tranche, & que l'on diviſe le tout par les deux premieres Racines doublées, l'on trouvera pour Quotient la troiſiéme Racine, puiſqu'en diviſant le Produit par l'une de ſes Racines,

Digitized by Google

le Quotient donne l'autre. Par ce Quotient trouvé il faudra multiplier ce double des deux premieres Racines; & comme la ſeconde Colomne de la troiſiéme Tranche commence à contenir le Quarré de la troiſiéme Racine, qui de là s'étend ſur la premiere Colomne de cette même Tranche, il eſt manifeſte qu'il faudra joindre à ce Produit du double des deux Racines, par la troiſiéme, le Quarré de la troiſiéme, en commençant d'une Colomne plus avancée vers la droite, & de là ſuivant à la gauche. Ainſi dans nôtre exemple je double 67 & j'ai 134, je demande 134 en 1200, combien de fois. J'ai pour Quotient 9, par 9 je multiplie

	134
	9
Et j'ai	1206
je joint le Quarré de 9	81
	12141

Mais comme cette Somme ſurpaſſe 1200, je choiſis un Quotient inferieur d'une unité, & par 8 je multiplie

	134
	8
pour avoir le Produit . . .	1072
auquel je joint le Quarré de 8	64
	10784

Je l'ôte de 12005 & il me reſte 1221. J'ai donc ôté des 3 premieres Tranches le Quarré des 3 premieres Racines, il faut continuer à découvrir ce que doit renfermer le nombree 1221 qui me reſte.

Puiſqu'à la ſeconde Colomne de la Troiſiéme Tranche, commence le Quarré de la troiſiéme Racine, il eſt évident que le Produit de la quatriéme

me, par la troiſiéme, devra commencer une Colomne plus bas ou plus à la droite, & par conſequent (en raiſonnant comme nous venons de faire) le Produit du double de la troiſiéme Racine, par la quatriéme, doit commencer à la quatriéme Tranche, & s'avancer dans les Tranches precedentes, leſquelles Tranches precedentes contiendront de plus le Produit du double des deux premieres, par la quatriéme. Si donc l'on double les trois premieres Racines, & que par ce double l'on diviſe la premiere Colomne de la quatriéme Tranche, & tout ce qui la precede, l'on aura pour Quotient la quatriéme Racine.

Ainſi je double 678 & j'ai 1356 pour diviſer 122121, ce qui me donne le Quotient 9, par

lequel je multiplie	1356
pour avoir	12204
à quoi j'ajoûte	81
& j'ai la ſomme	122121

égale au reſte de mon Quarré, duquel par conſequent j'ai trouvé toutes les Racines ou la Racine totale 6789.

SECOND EXEMPLE.

Je veux extraire la Racine Quarrée de 128164.

1	2	8	1	6	4 (
	9				
	3	8	1		
	3	2	5		
		5	6	6	4

1°. Je diviſe mon Quarré en Tranches, & d'abord je connois que ſa Racine ſera compoſée de 3 Colomnes. Je ſai auſſi que la premiere Tranche contient le Quarré de la premiere des Racines. Et puiſque 9 eſt le plus grand Quarré qui ſoit contenu en 12, je conclus que la premiere Colomne de la Racine quarrée que je cher-

Digitized by Google

che, doit être marquée du Chifre 3 : ſon Quarré 9 commence à la ſeconde Colomne de la premiere Tranche, je le place dans cette Colomne, & j'ôte 9 de 12, reſte 3, que je joins avec 81 de la Tranche ſuivante.

2°. Je fais $3 = a$, donc $6 = aa$: le Produit $2ab$ double de la premiere Racine par la ſeconde, doit commencer ſous le Chifre 8, & s'avancer à la gauche. Je double donc 3 & j'ai $6 = 2a$. : Pour trouver b, la ſeconde Racine, je diviſe 38 par 6 ; car 38 doit contenir $2ab$, & par conſequent diviſé par $6 = 2a$, il donnera pour Quotient un nombre qui ſera la valeur de b.

$6 = 2a$	
$5 = b$	
$30 = 2ab$	
$25 = bb$	
325	
$35 = a$	
$70 = 2a$	
$8 = b$	
$560 = 2ab$	
$64 = bb$	
5664	

6 eſt bien 6 fois en 38, mais parce que le Produit 36, ſi on lui ajoûte le Quarré de 6, en avançant d'une Colomne vers la droite, donneroit 396, plus grand que 381 ; au lieu du Quotient 6, je prens le Quotient 5. Je multiplie 6 par 5, & j'ai 30, j'ajoûte 25, Quarré de 5, en avançant d'une Colomne vers la droite, & j'ai 325, que j'ôte de 381, parce que le Quarré de ſeconde Racine commence à la ſeconde Colomne de la ſeconde Tranche, & il me reſte 56, à quoi je joint la Tranche ſuivante.

3°. Je conſidere la Somme 35 comme une ſeule Racine que j'appelle auſſi a ; cela étant ma troiſiéme Racine que je cherche ſera 6 : car puiſque $a = 35$, aa ſera égal au Quarré de 35, lequel Quarré a déja été exactement ôté de 128164, reſte à ôter $2ab + bb$: le Produit $2ab$, de $2a = 70$,

Digitized by Google

double de la Racine 35, ce Produit commence à la premiere Colomne de la troiſiéme Tranche, & s'avance dans la ſeconde Tranche. Je diviſe donc 566, qui doit renfermer $2ab$, par $70 = 2a$, & j'ai pour Quotient $8 = b$ ma troiſiéme Racine. Je multiplie 70 par 8, j'ai 560, à quoi je joint le Quarré de la troiſiéme Racine 8, en commençant d'une Colomne plus avancée vers la droite, & j'ai 5664 préciſément égal à ce qui me reſtoit.

AUTRE EXEMPLE.

Il faut tirer la Racine de 75846681.

7	5	8	4	6	6	8	1	(	8	7 0
6	4									
1	1	8	4							
1	1	6	9							
		1	5	6	6	8	1			

1°. Le plus grand Quarré renfermé en 75, c'eſt 64. Je place ſa Racine 8 dans la premiere Colomne du Quotient, & je ſouſtrait 64 de la premiere Tranche. A ce qui me reſte, ſavoir 11, je joint la ſeconde Tranche. Sous le Nombre 8 de cette ſeconde Tranche commence le Produit de 16 par la ſeconde Racine que je cherche : je diviſe donc 118 par 16, & le Quotient 7 ſera ma ſeconde Racine, avec laquelle j'opere, ſuivant la méthode de l'Article précedent, & j'ai 1169, lequel Nombre renferme le Produit de la ſeconde Racine, par la premiere Racine doublée, avec le Quarré de la ſeconde ; j'ôte ce Nombre de la ſeconde Tranche, & de ce qui me reſtoit dans la premiere, & au reſte 15 je joint la troiſiéme Tranche.

	16
	7
	112
	49
	1169

Digitized by Google

A la premiere Colomne de cette troiſiéme Tranche doit commencer le Produit de 2 fois 87 = 174 par la troiſiéme Racine, je diviſe donc 156 par 174, j'ai pour Quotient 0; ce qui me fait connoître que je dois joindre à 156 la quatriéme 81. Sous la premiere Colomne de cette quatriéme Tranche eſt contenu le Produit de 2 fois 870 = 1740, par la quatriéme Racine, lequel Produit s'étendra ſur les Tranches de la gauche. Je diviſe donc 15668 par 1740, j'ai 9 pour Quotient; & après avoir fait l'Operation ſuivante, je trouve que j'ai l'exacte Racine que je cherchois.

1740
9
15660
81
156681

Pour tirer la Racine quarrée de 2503701369. Je fais les Operations ſur leſquelles on n'a qu'à jetter les yeux pour les comprendre.

2 5 0 3 | 7 0 1 3 | 6 9 (5003
2 5 |
0 0 | 0 3 | 7 0 | 1 3 |
3 0 0 0 9
0 7 0 0 4 6 9

5	500	5003
2	2	2
10	1000	10006
50	3	7
2	3000	70042
100	9	49
	30009	700469

16. Si vous voulez avoir une Image de la formation des Quarrez, vous n'avez qu'à jetter les yeux

Eclairiſſement.

17. Quarré

$a+b$

$7\ \ 8$

$7\ \ 8$

$6\ \ 2\ \ 4$

$5\ \ 4\ \ 6$

$6\ \ 0\ \ 8\ \ 4$

Multiplié par ſes parties

$a+b$

$7\ \ 8$

$4\ \ 8\ \ 6\ \ 7\ \ 2$

$4\ \ 2\ \ 5\ \ 8\ \ 8$

$4\ \ 7\ \ 4\ \ 5\ \ 5\ \ 2$

$a+b$

$a+b$

$7\ \ 8$

$7\ \ 8$

$6\ \ 4 = bb$

$5\ \ 6 = ab$

$5\ \ 6 = ab$

$4\ \ 9 = aa$

$a+b$

$7\ \ 8$

$5\ \ 1\ \ 2 = b^3$

$4\ 4\ \ 8 = abb$

$4\ 4\ \ 8 = abb$

$3\ 9\ 2 = aab$

$4\ 4\ \ 8 = abb$

$3\ 9\ 2 = aab$

$3\ 9\ 2 = aab$

$3\ \ 4\ \ 3 = a^3$

$4\ \ 7\ \ 4\ \ 5\ \ 5\ \ 2$

$7 = a$

$7 = a$

$4\ \ 9 = aa$

$7 = a$

$3\ \ 4\ \ 3 = a^3$

$4\ \ 9 = aa$

$3\ \ 3$

$1\ \ 4\ \ 7 = 3aa$

$8 = b$

$1\ \ 1\ \ 7\ \ 6 = 3aab$

$8 = b$

$8 = b$

$6\ \ 4 = bb$

$3 = 3$

$1\ \ 9\ \ 2 = 3bb$

$7 = a$

$1\ \ 3\ \ 4\ \ 4 = 3abb$

$6\ \ 4 = bb$

$8 = b$

$5\ \ 1\ \ 2 = b^3$

$3\ \ 4\ \ 3 = a^3$

$1\ \ 1\ \ 7\ \ 6 = 3aab$

$1\ \ 3\ 44 = 3abb$

$512 = b^3$

$4\ \ 7\ \ 4\ \ 5\ \ 5\ \ 2$

Digitized by Google

yeux sur la Figure ci-jointe. Je suppose la Ligne AC composée de 2 parties $AB+BC$; le Quadrilatere $ACEH$ est le Quarré de la Ligne AC ; je dis que ce Quarré renferme 1°. Le Quarré de AB. 2°. Deux Produits de AB, par BC. 3°. Le Quarré de BC. FIG. IV.

Démonstration. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à tirer depuis le Point B la Ligne BK parallele aux côtez AH, CE ; puis prendre sur CE, $CD=BC$; & par le Point D, tirer DG parallele aux côtez AC, HE, on aura le grand Quadrilatere divisé en quatre autres. $GFKH$ sera le Quarré de AB ; car puisque $CE=ABC$ & $CD=BC$, il s'ensuit que $DE=AB$, or $DE=FK=GH$; puisque ces trois Lignes sont paralleles & enfermées entre les deux paralleles DG, HE, voila donc déja deux côtez égaux à BA ; mais GF & HK sont égaux à BA, parce qu'ils sont paralleles & enfermez entre les mêmes paralleles. Je prouverai de même que $BCDF$ est le Quarré BC, & puisque $BF=BC$, le Rectangle $BFGA$ est le Produit de BA par BC. Enfin, puisque $DE=AB$ & $FD=BC$, le Rectangle $FDEK$ est encore égal au Rectangle $ABFG$, & par consequent un Produit de AB, par BC.

Si l'on joint à $CD+DE$ la Ligne EN, l'on aura la Ligne CN pour côté du Quarré $COSN$, & ce Quarré contiendra 1°. Le Quarré de $CD+DE$ qui est $CAHE$. 2°. Deux Rectangles sous CE & EN, qui sont $ENMH$, $AHPO$. 3°. Le Quarré de EN, qui est $HMSP$. FIG. V.

CHAPITRE VII.

Des Cubes.

Preuves des places qu'occupent les Produits qui compoſent un Cube.

1. NOus avons prouvé que quand un Quarré eſt compoſé de pluſieurs Colomnes, en commençant de la droite à la gauche, les deux premieres contiennent le Quarré de la premiere Racine, en comptant auſſi pour premiere Racine celle qui eſt le plus à la droite; que les deux ſecondes contiennent le Quarré de la ſeconde Racine; les deux ſuivantes celles de la troiſiéme, & ainſi de ſuite, en allant ſucceſſivement de deux Colomnes en deux Colomnes.

2. On ſait encore que le Cube de la premiere Racine ſe forme en multipliant par cette Racine ſon Quarré, contenu dans les deux premieres Colomnes de la droite; multiplication qui s'étend juſques à une troiſiéme Colomne, & par conſequent le Cube de la premiere Racine eſt contenu dans la premiere Tranche de la droite compoſée de trois Colomnes.

3. Comme le Quarré de la ſeconde Racine eſt à la troiſiéme Colomne, & que ſi l'on multiplie la troiſiéme d'un nombre par la ſeconde d'un autre, l'on fait naître dans le Produit une quatriéme Colomne; il s'enſuit que le Cube de la ſeconde Racine, commencera à la quatriéme Colomne, & pourra s'étendre juſques à la ſixiéme, & ainſi la ſeconde Tranche ſera compoſée de la quatriéme, cinquiéme & ſixiéme Colomne.

4. Le Quarré de la troiſiéme Racine commençant à la cinquiéme Colomne, ſon Cube com-

Digitized by Google

mencera à la ſeptiéme, parce qu'en multipliant la cinquiéme Colomne d'un nombre par la ſeconde d'un autre, il naît dans le Produit une ſeptiéme Colomne; car ſi la ſeconde multipliant la premiere, forme une troiſiéme, c'eſt-à-dire une qui s'avance de deux de plus, multipliant une cinquiéme, elle produira une ſeptiéme. L'on voit ſuffiſamment par là pourquoi l'on met trois Colomnes à chaque Tranche.

Parties d'un Cube.

5. Un Quarré de deux Racines, c'eſt le Quarré de $a + b$; & par conſequent $aa + 2ab + bb$, ſi l'on multiplie ce Quarré par $a + b$, l'on aura pour Cube $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Et puiſqu'il n'y a aucune *Premiere* que l'on ne puiſſe appeller a, ni aucune *Seconde* que l'on ne puiſſe appeller b. Tout Cube compoſé de deux Racines contiendra, 1°. Le Cube de la premiere. 2°. Trois Quarrez de la premiere multipliée par la ſeconde. 3°. Trois Quarrez de la ſeconde multipliée par la premiere, & enfin le Cube de la ſeconde.

Extraction.

6. On cherche donc dans la premiere Tranche de la gauche le Cube de la Racine qui eſt auſſi la premiere de la gauche, ou ſi vous voulez, l'on prend le Cube le plus approchant, mais au-deſſous du Nombre contenu dans la premiere Tranche, & la Racine de ce Cube eſt la premiere que l'on cherche.

7. L'on ôte ce Cube de la premiere Tranche, & l'on marque ce qui reſte, après quoi l'on quarre cette premiere Racine que l'on vient de trouver; l'on triple ce Quarré, & par ce nombre répondant à $3aa$, l'on fait une Diviſion dont le Quotient ſera b. Le Nombre diviſé commence à la premiere Colomne gauche de la ſeconde Tranche, & s'avance vers la gauche dans la premiere.

8. On quarre de même le Quotient que l'on vient

Digitized by Google

de trouver, l'on multiplie ce Quarré par 3, & ce Produit répondant à $3bb$, ſe multiplie encore par a; puis ainſi multiplié, il s'ajoûte au precedent $3aab$, mais en avançant d'une Colomne vers la droite.

9. Enfin l'on cube la ſeconde Racine trouvée & qui répond à b^3, & ce Cube s'ajoûte aux deux Sommes produites, en commençant toûjours d'une Colomne plus avancée vers la droite; & par cette méthode le Cube de la ſeconde Racine commence à la ſixiéme Colomne, en allant de la gauche à la droite, & de celle là & de ſes precedentes, l'on ſouſtrait le Cube de la ſeconde Racine avec les Produits dont il a été parlé, ce qui en tout fait le Cube des deux Racines.

10. Dès qu'une fois l'on a trouvé deux Racines, ſi le Cube dont l'on cherche la Racine totale eſt compoſé de pluſieurs Tranches, l'on conſidere les deux Racines trouvées, comme formant une ſeule ſomme, à laquelle on donne le nom de a, comme la Racine que l'on va chercher dans la troiſiéme Tranche reçoit encore celui de b.

11. Cela poſé, je remarque 1°. Que le Cube de la ſomme a a déja été extrait des deux Tranches precédentes, il faut donc 2°. quarrer cette ſomme a; tripler ce Quarré, & par ce Quarré triplé diviſer la premiere Colomne de la troiſiéme Tranche & les precedentes, le Quotient donnera un nombre répondant à b.

12. Par cette Racine b il faut multiplier le Quarré de a triplé. A ce Produit il faut ajoûter une ſeconde ſomme, en avançant d'une Colomne vers la droite, & cette Somme, c'eſt le Quarré de b triplé & multiplié par a. Enfin, à ces deux Sommes il faut encore ajoûter le Cube de b, en avan-

Digitized by Google

çant toûjours d'une Colomne vers la droite, la Somme totale qui reſultera de ces trois, il la faut ſouſtraire de la troiſiéme Tranche & de ce qui la precede.

13. Si l'on a une quatriéme Tranche, l'on conſiderera les trois Racines déja trouvées, comme compoſant une ſeule Somme, & pour la Racine répondante à la Quatriéme Tranche, l'on operera avec la Somme des trois premieres, comme l'on a operé avec la Somme des deux précedentes pour avoir la troiſiéme.

14. Quand j'ai formé le Quarré des deux Racines $a+b$, ſi je commence à compter les Colomnes du Produit de droite à gauche; à la premiere commence le Quarré bb, à la ſeconde commence le Plan $2ab$, à la troiſiéme commence le Quarré aa. Cela eſt clair par ce que nous avons dit ſur la formation des Quarrez : Si donc je multiplie ce Produit derechef par la même Racine $a+b$, il eſt évident que b multipliant la premiere où commence bb, la premiere Colomne du Produit contiendra le commençement du Cube b^3. Nouvelles Preuves,

Puiſque la ſeconde Colomne du Quarré commence à contenir $2ab$, en multipliant cette ſeconde Colomne par b, vous aurez $2abb$, lequel Produit commence à la ſeconde Colomne du Cube, mais à cette même Colomne commence le Produit de bb par a, & ainſi à la ſeconde Colomne commence le Solide $3abb$.

Puiſqu'à la troiſiéme Colomne commence le Quarré aa, lorſque je multiplie cette troiſiéme Colomne par b, j'ai le commencement de aab dans la troiſiéme Colomne du Produit; & parce que la Racine a multipliant la ſeconde Colomne du Quarré où commence $2ab$ forme un Produit

Digitized by Google

qui ſe place encore à la troiſiéme Colomne du Cube, (car les dixaines multiplians les dixaines, produiſent des centaines,) il s'enſuit qu'à cette troiſiéme Colomne commence le Produit $3aab$.

Enfin puiſque le Quarré aa commence à la troiſiéme Colomne, il eſt évident qu'en multipliant cette troiſiéme Colomne du Quarré par la Racine a, l'on aura le Cube a^3 commençant à la quatriéme Colomne du grand Produit.

Si donc je diviſe ce grand Produit par des Tranches, en commençant de droite à gauche, & renfermant trois Colomnes dans chaque Tranche, il eſt manifeſte que la premiere Tranche de la gauche contiendra le Cube de la premiere Racine de la gauche, lequel Cube commencera à la Colomne la plus à la droite de cette Tranche, & s'avancera ſur la gauche.

Exemples.

4	7	4	5	5	2	(	7	8
3	4	3						
1	3	1	5	5	2			
		1	1	7	6			
			1	3	4	4		
					5	1	2	
		1	3	1	5	5	2	

15. Pour trouver la Racine Cubique de 474552, je cherche d'abord un Cube le plus approchant de 474, je trouve $343 = a^3$, dont la Racine eſt $7 = a$. J'ôte ce Cube de 474, il me reſte 131 dans cette Tranche. A la Colomne la plus à la gauche de la ſeconde Tranche, commence le Solide $3aab$, lequel s'avance dans la premiere Tranche: ce Solide eſt donc contenu en 1315. Pour découvrir quelle doit être ma ſeconde Racine, je diviſe $1315 = 3aab$ par $3aa$, c'eſt-à-dire dans cette rencontre par 147, le Quotient ſera $8 = b$, ma ſeconde Racine, je multiplie donc 147 par 8, & j'ai $1176 = 3aab$.

Je dois preſentement continuer à trouver dans mon Cube $3bba$; je multiplie donc $64 = bb$

Digitized by Google

par 3, & j'ai 192, lequel je multiplie encore par $7 = a$, & j'ai $1344 = 3abb$: la Colomne la plus à la droite de ce Solide doit ſe placer auſſi d'une Colomne plus à la droite, & ainſi placée ſe joindre avec 1176.

Enfin je dois trouver le Cube de ma ſeconde Racine qui eſt $512 = b^3$: Il faut joindre ce Cube aux deux ſommes précedentes, en commençant auſſi à le placer d'une Colomne de plus à la droite, & j'ai pour ſomme totale 131552, ce qui acheve d'égaler le reſtant de mon Cube.

Lorſque ces trois ſommes jointes enſemble, ſuivant la Méthode qu'on vient d'indiquer, ſurpaſſent la ſomme de laquelle on doit les tirer, c'eſt une preuve que le Quotient a été choiſi trop grand, il en faut donc prendre un autre plus petit de l'unité, juſques à ce que ces trois Sommes, qui ſont égales à $3aab + 3abb + b^3$, puiſſent ſe déduire de la ſomme de laquelle il faut les tirer.

SECOND EXEMPLE.

Il faut tirer la Racine Cube de 49836032, 1°. Je partage ce nombre en Tranches, en commençant par la droite, & j'enferme trois Colomnes en chaque Tranche juſques à celle de la gauche qui n'en contient que deux. 2°. Je conſidere que ſi ce Cube n'avoit que deux Racines, il ne pourroit pas s'étendre au-delà de 6 Colomnes, & par conſequent ſeroit tout renfermé en deux Tranches.

3°. Quand un Quarré a trois Racines, le Quarré de la Racine qui eſt le plus à la gauche, commence à la cinquiéme Colomne, en les comptant depuis la droite; car les centaines multiplians des

Digitized by Google

4	9	8	3	6	0	3	2	(	3 6 8
2	7								
2	2	8	3	6					
1	9	6	5	6					
	3	1	8	0	0	3	2		

A

$3 = a$

$3 = a$

$9 = aa$

3

$27 = 3aa$

$9 = b$

$243 = 3aab$

$27 = 3aa$

$7 = b$

$189 = 3aab$

$49 = bb$

$3 = a$

$147 = abb$

$3 = 3$

$441 = 3abb$

$49 = bb$

$7 = b$

$343 = b^3$

189

441

343

$236\,53$

$27 = 3aa$

$6 = b$

$162 = 3aab$

$36 = bb$

$3 = a$

$108 = abb$

$3 = 3$

$324 = 3abb$

$36 = bb$

$6 = b$

$216 = b^3$

$324 = 3abb$

$162 = 3aab$

19656

B $a + b = d = 36$

$d = 36$

216

108

$1296 = dd$

3

$3888 = 3dd$

$8 = c$

$31104 = 3ddc$

C $cc = 64$

3

$192 = 3cc$

$36 = d$

1152

576

$6912 = 3ccd$

$64 = cc$

$8 = c$

$512 = c^3$

$31104 = 3ddc$

$6912 = 3ccd$

$512 = c^3$

$31800\,32$

Digitized by Google

centaines, produiſent des dix milles.

4°. Cette cinquiéme Colomne du Quarré, ſi en allant de droite à gauche, on la multiplie par la troiſiéme de la Racine, en allant auſſi de droite à gauche, ſon Produit (lequel Produit ſera le Cube de la premiere Racine de la gauche) commencera à la ſeptiéme Colomne, en comptant la plus à la droite pour la premiere; car les dix milles multipliez par les centaines, forment des millions, ainſi donc le Cube de la premiere Racine de la gauche, commence à la ſeptiéme Colomne qui eſt la premiere de la droite de la troiſiéme Tranche.

5°. J'appelle ce Cube a^3, & ſa Racine a. La Racine ſuivante ſera b, & cette Racine inferieure à la premiere a d'une Colomne, doit en multipliant $aa + 2ab + bb$, donner $aab + 2abb + b^3$, & les deux dernieres ſommes $2ab + bb$, étant multipliées par a, doivent former les deux ſommes $2aab + abb$, dans le même ordre que nous l'avons démontré dans le premier Exemple; c'eſt-à-dire, que le Produit $3aab$ commencera à la Colomne gauche de la ſeconde Tranche, le Produit $3abb$ à la Colomne du milieu, & le Produit b^3 à la Colomne de la droite.

6°. Donc après avoir ôté de 49, le Cube 27, le plus approchant de ceux qui y ſont renfermez, il me reſte 22 dans ma premiere Tranche de la gauche, à ces 22 je joins 836 contenus dans la ſeconde Tranche.

7°. $a = 3$. Donc $aa = 9$. Donc $3aa = 27$; & puiſque $3aab$ commence ſous la Colomne gauche de la ſeconde Tranche, pour avoir b ma ſeconde Racine, je diviſe 228 par $27 = 3aa$. Je dis donc 2 en 22 ſe trouve 9 fois; mais comme 27 multiplié par 9 donne d'abord 243, je

vois que 9 eſt trop grand ; je deſcens donc à 8, puis à 7 : mais en operant avec 7, je trouve enfin que $3aab + 3abb + b^3$ montent à 23653, voila pourquoi je viens à 6 ; & après mes trois operations achevées, je trouve que $19656 = 3aab + 3abb + b^3$. J'ôte cette ſomme de 22836 & il me reſte 3180, auquel reſte je joins la troiſiéme Tranche, & j'ai en tout 3180032. Dans cette ſomme ſe doit trouver le reſte du Cube.

Pour découvrir quel doit être le reſte de ce Cube, & en même temps la Racine de la droite, il faut ſe ſouvenir que pour former un Cube, l'on forme d'abord un Quarré. A la premiere Colomne de la droite de ce Quarré commence le Quarré de la Racine la plus à la droite, lequel Quarré eſt ici cc. Le Produit des deux premieres Racines doublées, ſavoir le Produit de $2a + 2b$ par c, commence à la Colomne ſuivante, pour s'étendre à la gauche ; de ſorte que ſi je fais $a + b = d$, $2dc$ commencent à la ſeconde Colomne de la droite ; & ſi je multiplie $2dc$ par la Racine c, j'aurai le Produit $2dcc$, commençant à la ſeconde Colomne de la droite. A cette même Colomne commence le Produit du Quarré cc par les Racines précedentes ; & ainſi à cette même Colomne commence dcc, & par conſequent à la Colomne du milieu de la ſeconde Tranche commence $3dcc$. Le Quarré des deux précedentes Racines $a + b$, c'eſt-à-dire le Quarré dd commence à la troiſiéme Colomne de la droite, pour s'avancer à la gauche, & ainſi à cette troiſiéme Colomne commence ddc ; & parce que $2dc$ commence à la ſeconde Colomne de la droite, & que le Produit de cette ſeconde Colomne par d, ſomme des Racines $a + b$, commence auſſi à la troi-

Digitized by Google

ſiéme Colomne de la droite; il eſt évident qu'à cette troiſiéme Colomne de la droite, qui eſt la Colomne gauche de la troiſiéme Tranche, commence $3ddc$.

Enfin le Quarré cc commençant à la derniere Colomne de la droite, le Cube c^3 commence à la même Colomne.

Je ſai donc que ſous le nombre 31800 je dois trouver la valeur de $3ddc$; de ſorte que pour trouver la troiſiéme Racine c, je diviſe ce nombre par $3dd$, $d=36$, le Quarré de 36, c'eſt 1296. Si je le triple, j'aurai $3888=3dd$: par ce nombre 3888 je diviſe 31800, & je trouve d'abord pour Quotient 9, mais ce Quotient étant trop grand, je deſcens à 8; je multiplie donc 3888 par $8=c$, & j'ai $31104=3ddc$. Après cela je prens le Quarré $64=cc$, je le triple, & j'ai $192=3cc$; je multiplie 192 par 36, & j'ai $6912=3ccd$; je joins en une ſomme 31104 & 6912, en avançant d'une Colomne vers la droite. J'y ajoûte enfin le Cube de $8=c$, qui eſt $512=c^3$, & ces trois ſommes jointes enſemble égalent ce qui me reſtoit.

AUTRE EXEMPLE.

Il faut chercher la Rac. Cube de 91599671814552.

1°. Je partage ce nombre en Tranches, & j'en ai 5, ce qui m'avertit que ma Racine aura 5 Colomnes.

2°. Le Cube le plus approchant de 91, valeur de la premiere Tranche, c'eſt 64, ſa Racine eſt 4 que j'écris au Quotient, & je ſouſtrais 64 de 91, reſte 27, à quoi je joins la Tranche ſuivante 599.

3°. Je diviſe 275 par 48, qui eſt le Quarré

9 1 | 5 9 9 | 6 7 1 | 8 1 4 | 5 5 2 (a b d f h
6 4   4 5 0 7 8
2 7 5 9 9 |
2 7 1 2 5 |

4 7 4 | 6 7 1 | 8 1 4 |
4 2 5 | 9 1 1 | 8 4 3 |

4 8 | 7 5 9 | 9 7 1 | 5 5 2

$aa = 16$
3   3

$3aa = 48$
$b = 5$

$3aab = 240$

$bb = 25$
3   3

$3bb = 75$
$a = 4$

$3bba = 300$

$b^{3} = 125$

240
300
125

27125

$45 = a + b = c$
$45 = c$

225
180

$2025 = cc$
$3 = 3$

$6075 = 3cc$

$a + b + d + f = g = 4507$
$g = 4507$

31549
225350
18028

$gg = 20313049$
3   3

$3gg = 60939147$
$h = 8$

$3ggh = 487513176$

$hh = 64$
3   3

$3hh = 192$
$g = 4507$

4507
192

9014
40563
4507

$3hhg = 865344$

$h^3 = 512$
487513176
865344
512

48759971552

de 4 triplé, le Quotient eſt 6; mais comme en operant je le trouve trop grand, je deſcens à 5: je multiplie donc 48 par 5, puis 75 triple du Quarré de 5 par 4, & enfin je cube 5: ces 3 ſommes ajoûtées, ſuivant la Méthode des Articles précedens, montent à 27125. J'ôte cette ſomme de 27599, il me reſte 474, à quoi je joins la Tranche ſuivante 671, & j'écris 5 au Quotient pour ma ſeconde Racine.

$a+b+d=e=450$
$e=450$
22500
1800
$ee=202500$
3 3
$3ee=607500$
$f=7$
$3eef=4252500$
$ff=49$
3 3
$3ff=147$
$e=450$
7350
588
$3eff=66150$
$f^3=343$
4252500
66150
343
42591843

4°. Je diviſe 4746 par 6075 triple du Quarré de 45, le Quotient c'eſt 0 que je place à la 3e Colomne de ma Racine Cube.

5°. J'avance donc, & au nombre 474671 je joins la Tranche ſuivante 814; je diviſe 4746718 par 607500 triple du Quarré de 450, le Quotient eſt 7, que j'écris pour 4e Colomne; je multiplie par 7, 607500; je multiplie auſſi 147 triple du Quarré de 7 par 450: enfin je cube 7, & après avoir joint ces trois ſommes en une, ſuivant la Méthode marquée ci-devant, j'ai 42591843, laquelle ſomme j'ôte de 47467814, & il me reſte 4875997 1, auquel reſte je joins la derniere Tranche 552.

Digitized by Google

6°. Je diviſe 487599715 par 60939147 triple du Quarré de 4507, j'ai pour Quotient 8, qui ſera ma derniere Colomne; je multiplie 60939147 par 8; enſuite je multiplie 192 triple du Quarré de 8 par 4507, & enfin je cube 8, & après avoir aſſemblé le tout ſuivant la teneur de la Regle, j'ai 4875997152, nombre préciſément égal à celui qui me reſte de mon Cube.

FIG. VI. Pour ſe mettre ſous les yeux la generation du Cube & la compoſition des parties que nous lui avons aſſignées, aïez un Cube, c'eſt-à-dire un Solide de 6 faces égales entr'elles & quarrées chacune. Le Quarré *FGHI* repreſente l'une de ces faces : diviſez la ligne *FG* en deux parties, dont l'une ſera *A* & l'autre *B* : cette ligne *FG* eſt la racine totale du Cube, & les 2 lignes *A+B* ſont les racines partiales. Partagez donc la face *FGHI* en quatre parties, dont l'une ſera *AA*, l'autre *BB*, & les deux autres chacune *AB* : coupez enſuite ce Cube par des Sections perpendiculaires, en le fendant ſuivant les lignes qui partagent le Quarré *FGHI*, vous aurez 4 Paralepipedes, c'eſt-à-dire 4 Solides, dont les faces oppoſées ſeront paralleles & égales. Le premier aura pour ſa hauteur *A+B* la racine entiere du Cube, & pour ſa baſe *AA*; le Rectangle *MN* vous repreſente le côté perpendiculaire, & le Quarré *AA* la baſe. Partagez ce Paralepipede par le Point qui ſepare *A* de *B*, & faites la Section parallele à la baſe, vous aurez pour l'une des parties le Cube a^3, & pour l'autre un Paralepipede, dont la baſe ſera *AA* & la hauteur *B*, qui par conſequent ſera *AAB*. *AA* repreſente une de ces faces, & *AB* l'autre; voila pour la diviſion du premier Paralepipede. Deux autres ſeront égaux entr'eux,

entr'eux, & auront pour baſe le Rectangle AB, & pour côté le Rectangle MN. Si vous diviſez ces côtez par le Point qui ſepare la Racine A de la Racine B, & que la Section ſoit parallele à la baſe AB, ces deux Paralepipedes égaux vous donneront quatre autres Paralepipedes, deſquels 2 ſeront derechef AAB, (& voila déja $A^3 + 3AAB$) les 2 autres auront pour baſe AB, & pour hauteur B : 4 de leurs faces ſeront AB, & 2 ſeront BB, vous aurez donc $2BBA$. Enfin le 4e des Paralepipedes dans leſquels vous aviez d'abord partagé le Cube, aura pour ſa baſe BB, & pour ſa hauteur $A + B$; partagez-le encore comme les autres, vous aurez d'un côté un Paralepipede BBA, & de l'autre B^3, & voila $3BBA + B^3$.

CHAPITRE VIII.

Formation des autres Puiſſances.

NOus ne connoiſſons dans les Corps que des Lignes, des Surfaces & des Solides ; de ſorte que les Puiſſances qui exiſtent dans la nature corporelle, ſe réduiſent à deux, aux Quarrez & aux Cubes : mais comme l'on peut multiplier un nombre Cubique par ſa Racine, le Produit qui réſulte de cette Multiplication s'appelle 4e Puiſſance; & ſi l'on multiplie derechef ce Produit par ſa Racine, l'on aura une 5e Puiſſance, par où l'on voit que les Puiſſances peuvent s'augmenter à l'infini. a^3 multiplié par a, donne a^4. a^4 multiplié par a, donne a^5. $a^5 \times a$, donne a^6. $a^1 \times a^{12}$, &c.

1. Quand on multiplie par ſa Racine un Cube,

le Produit s'appelle 4e Puiſſance, & ce nouveau Produit multiplié derechef par ſa Racine, donne la 5e Puiſſance, ainſi des autres à l'infini.

2. Puiſque quand on a trois Racines $a+b+c$, l'on peut confondre les deux premieres en une, de même que les trois premieres, quand on en a quatre, & ainſi de ſuite, comme nous l'avons expliqué ſur les Quarrez & ſur les Cubes; il ſuffit pour comprendre la generation & la reſolution des Puiſſances, de ſavoir à quoi elles montent, & comment on les reſout quand elles ſont compoſées de $a+b$.

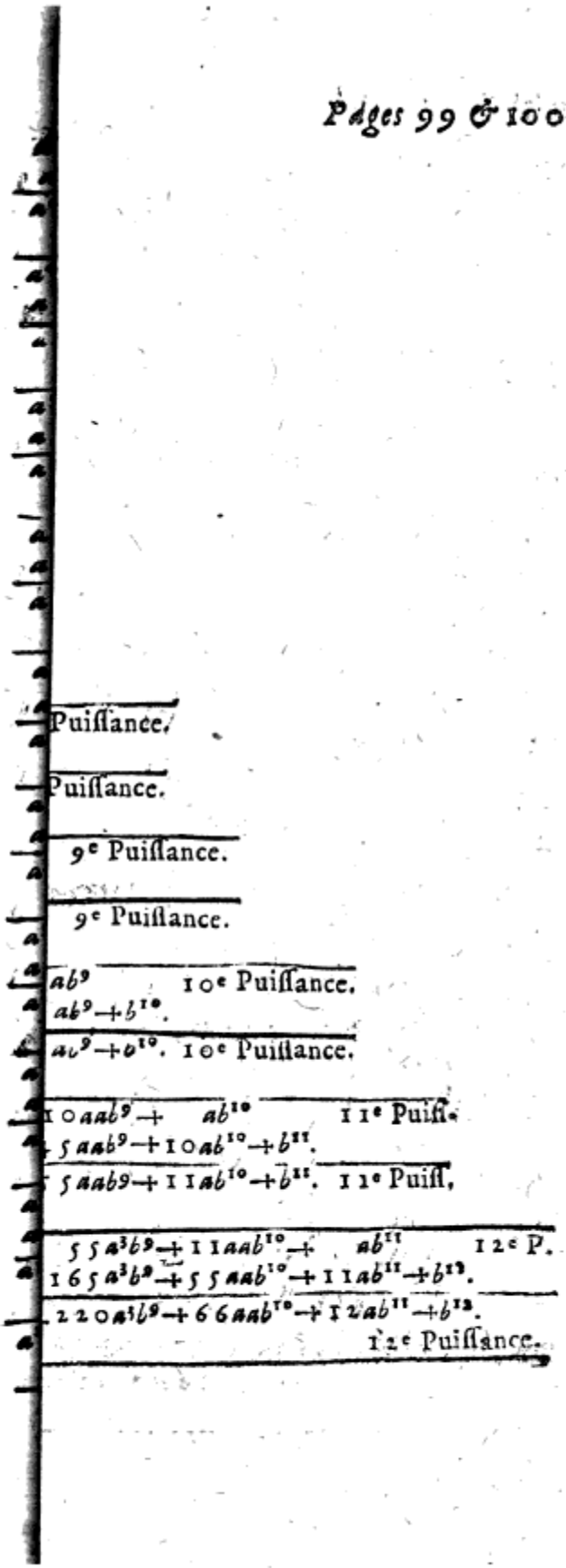
3. Après avoir partagé un Cube en Tranches compoſées chacune de trois Colomnes, ſi l'on multiplie ce Produit par ſa Racine, il eſt bien évident que le Cube de a, donnera la 4e Puiſſance de a, qui ne remplira tout au plus que quatre Colomnes; car 999×9, ne donne que 8991, de ſorte que pour reſoudre la 4e Puiſſance, il faut la partager en Tranches, de quatre Colomnes chacune, comme pour reſoudre la 5e. Il faut mettre cinq Colomnes en une Tranche, & ainſi conſecutivement.

4. En multipliant $a+b$ par $a+b$, l'on forme 4 Produits; mais comme c'eſt tout un de multiplier a par b, ou b par a, de ces 4 il y en a deux que l'on peut aſſembler en un, de ſorte qu'un Quarré n'eſt compoſé que de trois membres.

5. Quand on multiplie ces 3 membres par $a+b$, l'on forme d'abord 6 Produits; ſavoir 3 par a, & 3 par b; mais comme de ces ſix, quatre ſe réduiſent à deux, le Cube ne ſe trouve compoſé que de quatre membres.

6. Ces quatre membres multipliez par $a+b$, donneront d'abord huit Produits, dont ſix ſe ré-

Digitized by Google



Digitized by Google

duiſent à trois, reſtent cinq pour la 4e Puiſſance.

7. L'on aura par les mêmes raiſons la Puiſſance 5e compoſée de ſix membres, la 6e de ſept, ainſi de ſuite. Chaque Puiſſance aura un membre de plus que la précedente; car, ſi l'on excepte le premier & le dernier, dont l'un ne contient que des a, & l'autre que des b; tous les autres ſont tels que de deux, l'on peut n'en faire qu'un; & le nombre des Produits de chaque Puiſſance ſurpaſſe d'une unité le nombre qui indique l'élevation de cette Puiſſance. Voïez la Table.

Quand on a un Quarré en Lettres, pour en tirer la Racine Quarrée, 1°. On choiſit les Quarrez Incomplexes dont on prend les Racines. 2°. On fait le Quarré de toutes ces Racines qui ſera égal au Quarré donné.

Pour extraire la Racine Cube on prend de même les Cubes Incomplexes dont on extrait les Racines, & on cube l'aſſemblage de ces Racines.

Un Cube Incomplexe ſous le Signe —, a pour Racine une grandeur négative. Mais un Quarré Incomplexe peut être ſous le Signe +, & avoir une Racine négative. On la connoîtra par le moïen des Produits interpoſez. $-a \times -a$, donne $+aa$, mais $+b \times -a$, donne $-ab$.

Jamais Quarré Incomplexe n'eſt ſous le Signe —; mais après avoir dit $-a \times -a = +aa$, ſi je continuë pour parvenir au Cube $+aa \times -a = -a^3$.

Puiſqu'un Quarré Incomplexe eſt toûjours ſous le Signe +, toute Puiſſance, dont l'expoſant eſt un nombre pair, eſt ſous le Signe +, parce que formée d'une quantité égale multipliée par elle-même, elle eſt un Quarré.

8. Dans chaque Puiſſance, la premiere & la

derniere quantité ſont *a* & *b*, élevez chacun à la Puiſſance dont il s'agit. Tout ce qui eſt entre ces deux contient divers Produits de *a* par *b*, ou des Puiſſances de *a* par les Puiſſances de *b*.

9. Dans les Quarrez les Produits compoſez ſont de ſimples plans de *a* par *b*. Dans les Cubes, en multipliant *aa* par *b*, & *bb* par *a*, & *ab* une fois par *a*, une fois par *b*, l'on a des Quarrez de *b* multipliez par *a*, & des Quarrez de *a* multipliez par *b*.

10. Dans la 4e Puiſſance, en multipliant les Cubes de *a* par *b*, & les Cubes de *b* par *a*, auſſi-bien que les Quarrez de *a* par *a*, & les Quarrez de *b* par *b*, ou les Produits dans leſquels ces Quarrez entrent, l'on a des Cubes de *a* multipliez par des Quarrez de *b*, & des Cubes de *b* multipliez par les Quarrez de *a*.

11. En raiſonnant ſur les mêmes principes, l'on trouvera que chaque Puiſſance contient entre ſes deux derniers membres, des Produits compoſez de parties qui s'élevent un degré plus haut que les parties dont ſont compoſez les Produits de la Puiſſance précedente; car quelque Produit que ce ſoit, puiſqu'il contient une certaine Puiſſance de *a* pour l'une de ſes Racines, ſi je la multiplie par *a*, cette Puiſſance deviendra *a*, élevé à une Puiſſance d'un degré plus haute.

12. Dans la ſeconde Puiſſance les deux Racines du Plan *ab* ſont toutes deux Linéaires, & par conſequent de même degré. Mais quand je forme le Cube, ſoit que je multiplie *ab* par *a*, ſoit que je le multiplie par *b*, j'ai des Produits où ces deux Racines ſont inégalement élevées, l'une ſurpaſſant l'autre d'un degré. Mais pour former la 4e Puiſſance, quand je multiplie *aab* par *b*, ou

Digitized by Google

bba par *a*, je fais que les deux Racines ſe trouvent également élevées : la formation de la Puiſſance ſuivante détruit cette égalité, en élevant (dans chacun de ces Produits qui étoient auparavant compoſez de Racines également élevées) l'une des Racines d'un degré plus haut que l'autre. La Multiplication ſuivante reparera derechef cette inégalité, & ainſi ſucceſſivement ; de ſorte que dans chaque Puiſſance, dont le degré (qui s'appelle auſſi l'expoſant) eſt exprimé par un nombre pair, il ſe trouve un Produit de Racines également élevées.

13. Dans chaque Puiſſance le premier & le dernier terme ne ſont précedez d'aucun nombre, mais tous les autres ſont précedez de quelque nombre ; dans le Quarré c'eſt 2, dans le Cube c'eſt 3, dans la 4e Puiſſance c'eſt 4 & 6, dans la 5e c'eſt 5 & 10, dans la 6e c'eſt 6, 15 & 20, &c. ces nombres s'appellent les Coëfficiens. Dans la 2e Puiſſance il n'y en a qu'un qui ne ſe compte qu'une fois. Dans la 3e il n'y en a qu'un, mais il eſt repeté. Dans la 4e Puiſſance le Coëfficient 4 eſt repeté, & le Coëfficient 6 ne ſe trouve qu'une fois. Dans la 5e les deux Coëfficiens 5 & 10 ſe repetent deux fois. Dans la 6e les deux Coëfficiens 6 & 15 ſe repetent auſſi, & le troiſiéme Coëfficient 20 ne ſe repete pas ; & chaque Puiſſance dont l'expoſant eſt pair, a un Coëfficient qui ne ſe repete pas, c'eſt celui qui eſt à la tête du Produit compoſé de Racines également élevées.

14. Une Puiſſance impaire n'a pas un plus grand nombre de Coëfficiens que la Puiſſance paire immédiatement précedente, mais elle n'en a aucun qui ne ſoit repeté : chaque Puiſſance paire en a un de plus que la Puiſſance impaire immédiatement précedente, c'eſt celui qui ne ſe repete pas.

Digitized by Google

15. Dans chaque Puiſſance le premier Coëfficient marque, par ſes unitez l'élevation de la Puiſſance, & il eſt à la tête d'un Produit dont la plus haute Racine eſt élevée au degré de la Puiſſance précedente.

16. Comme ce qui ſe dit de la Racine *a* dans chaque Puiſſance, eſt également applicable à quelque nombre que ce ſoit, que l'on deſignera par *a*; & que de même tout ce qui ſe dit de la Racine *b*, devient exactement applicable à quelque autre nombre que ce ſoit, que l'on deſignera par *b*: il eſt manifeſte que les 12 Puiſſances dont nous venons de donner la Table, nous mettent ſous les yeux des Formules generales qui contiennent univerſellement les proprietez de toutes les parties qui compoſent une Puiſſance, & les rapports qu'elles ont enſemble; & chacune de ces Formules contient outre cela ſa démonſtration: car pour prouver que le 4e des Produits qui compoſent la 12e Puiſſance, contient un Produit compoſé des deux Racines; ſavoir de la premiere élevée à la 9e, & de la 2e élevée à la 3e Puiſſance, je n'ai qu'à former cette 12e Puiſſance en me ſervant des Racines $a+b$.

17. Je verrai par ces Formules que chacun des deux Produits où le même Coëfficient eſt repeté, autant que le premier contient la premiere Racine élevée à un certain degré, autant le ſecond renferme la 2e Racine dans la même élevation: Que dans l'un la premiere Racine, & dans l'autre la ſeconde eſt le multiplié; & qu'enfin autant que la ſeconde Racine eſt élevée dans le premier où elle eſt le Multipliant, autant la premiere eſt élevée dans la ſeconde où elle eſt de même le Multipliant. Je verrai encore que dans chaque Produit la Puiſſance où la pre-

Digitized by Google

miere Racine eſt élevée, baiſſe de Produit en Produit, d'un degré au-deſſous de l'élevation qu'elle avoit dans le Produit précedent; & au contraire l'élevation de la ſeconde Racine augmente d'un degré de Produit en Produit.

18. Toute Puiſſance dont l'expoſant ſe diviſe exactement par deux, eſt un Quarré; ainſi a^4 eſt le Quarré de aa, & s'appelle par cette raiſon le Quarré de Quarré, d'où vient que l'on peut extraire ſa Racine Quarrée, comme l'on fait dans les Quarrez ſimples, de laquelle Racine il faudra une ſeconde fois extraire la Racine Quarrée pour avoir ce que l'on cherche.

19. a^6 eſt de même le Quarré de a^3, a^8 de a^4, a^{10} de a^5, a^{12} de a^6, a^{14} de a^7, a^{16} de a^8, & par conſequent l'on pourra avoir la Racine de la 16e Puiſſance, en faiſant ſucceſſivement quatre extractions des Racines Quarrées.

20. Toute Puiſſance dont l'expoſant ſe diviſe par trois, eſt un Cube; ainſi a^6 eſt le Cube de a^2, a^9 de a^3, a^{12} de a^4, a^{15} de a^5, par où l'on voit que les mêmes Puiſſances, comme a^6 & a^{12} ſont tout enſemble des Quarrez & des Cubes.

21. Toute Puiſſance dont l'expoſant ſe diviſe par quatre, eſt un Quarré de Quarré, ou une 4e Puiſſance; ainſi a^{12} eſt 4e Puiſſance de a^3, a^{20} eſt 4e Puiſſance de a^5; a^{12} eſt donc Cube de a^4, 4e Puiſſance de a^3, 6e Puiſſance de a^2, & 12e Puiſſance de a.

22. Et en general, un Produit dont l'expoſant ſe diviſe exactement par quelques nombres, ce Produit eſt une Puiſſance élevée au degré marqué par les unitez des nombres qui ſont les Diviſeurs exacts de ſon expoſant; ainſi a^{19} ſera une 13e Puiſſance, a^{48} ſera une, 1°. 48e de a, 2°. ſeconde,

de a^{24}, 3°. 3e de a^{16}, 4°. 4e de a^{12}, 5°. 6e de a^8, 6°. 8e de a^6, 7°. 12e de a^4, 8°. 16e de a^3, 9°. 24e de a^2.

23. On voit par là que l'on peut former la même Puiſſance en plus d'une maniere, en réïterant les Multiplications plus ou moins de fois, & en ſe ſervant des Racines ſecondes, troiſiémes, quatriémes, &c. ſuivant que l'on conſidere cette Puiſſance comme 2e, 3e, ou 4e; ainſi en multipliant un Cube par lui-même, j'ai une 6e Puiſſance, & en multipliant encore une 4e Puiſſance par la ſeconde, j'ai derechef la même 6e Puiſſance, comme ſi je multipliois la 5e par ſa Racine.

$a^3 + 3aab + 3bba + b^3$
$a^3 + 3aab + 3bba + b^3$

$a^6 + 3a^5b + 3bba^4 + a^3b^3 + 3aab^4 + 3ab^5 + b^6$
$+ 3a^5b + 9bba^4 + 9a^3b^3 + 9aab^4 + 3ab^5$
$+ 3bba^4 + 9a^3b^3 + 3aab^4$
$+ a^3b^3$

$a^6 + 6a^5b + 15bba^4 + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^6$

$a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$
$aa + 2ab + bb$

$a^6 + 4a^5b + 6a^4bb + 4a^3b^3 + aab^4 + 2ab^5 + b^6$
$+ 2a^5b + 8a^4bb + 12a^3b^3 + 8aab^4 + 4ab^5$
$+ a^4bb + 4a^3b^3 + 6aab^4$

$a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^6$

24. L'on pourroit de même former diverſement toutes les autres Puiſſances, à l'imitation des deux Modèles que nous venons de donner, & par là l'on voit qu'il y a des Puiſſances dont on peut extraire la Racine en plus d'une maniere; ainſi je puis extraire la Racine de la 9e Puiſſance, en la conſiderant comme un Cube, ce qui donnera pour Racine un ſecond Cube, duquel je tirerai

Digitized by Google

derechef la Racine Cubique. Je puis de même extraire la Racine Quarrée de la 12ᵉ Puiſſance, cette Racine ſera elle-même un Quarré, lequel aura pour ſa Racine un Cube, & en tirant de ce dernier Cube la Racine Cubique, j'aurai la derniere Racine de la 12ᵉ Puiſſance. Mais quant aux Puiſſances dont l'expoſant ne ſe diviſe exactement que par lui-même, ou par l'unité, on ne peut extraire leurs Racines que d'une ſeule maniere, telles ſont la 5ᵉ, la 7ᵉ, la 11ᵉ Puiſſance.

25. Au lieu de a. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. les Arabes diſoient Racine, Quarré, Cube, Quarré de Quarré, Surſolide, Quarré de Cube, Surſolide ſecond.

Les Italiens appellerent enſuite le Quarré *Zenſus*, & le Cube *Zenzizenſus*, *Zenzicubus*, *Zenzizenzenſus*, *Zenſus de Solidus*.

Leurs Signes ou expreſſions Litterales étoient auſſi étranges que leurs noms.

26. De la même maniere qu'en multipliant un nombre quarré diviſé par Tranches, de droite à gauche, leſquelles renferment chacune deux Colomnes, de la même maniere, dis-je, qu'en multipliant ce nombre quarré par ſa Racine pour en faire un Cube, l'on multiplie ſes Colomnes, en telle ſorte que chaque Tranche en renferme trois. De même auſſi lorſque l'on multiplie ce Cube renfermant trois Colomnes en chaque Tranche; lors, dis-je, qu'on le multiplie par la même Racine qui a multiplié le Quarré, l'on augmente auſſi le nombre de ſes Colomnes, & on les porte juſques à quatre pour chaque Tranche; cette 4ᵉ Puiſſance multipliée derechef par ſa Racine pour former la 5ᵉ, croîtra de même en nombre de Colomnes, & en aura cinq à chaque Tranche.

Digitized by Google

27. Quand donc on a une Puiſſance, & qu'il faut en chercher la Racine, l'on doit, 1°. Diviſer cette Puiſſance en Tranches, en commençant par la droite, & renfermer dans chaque Tranche un nombre de Colomnes égal au nombre qui exprime l'expoſant de cette Puiſſance ; (car puiſqu'une 7e Puiſſance n'a pas plus de Racines qu'une ſeconde, elle ne doit pas avoir un plus grand nombre de Tranches ; mais puiſque les Colomnes croiſſent en nombre à meſure que les multications ſe réïterent, il faut neceſſairement que le nombre des Colomnes de chaque Tranche croiſſe, puiſque le nombre des Tranches ne doit pas augmenter.) 2°. La premiere Tranche de la gauche doit renfermer la Puiſſance de la premiere Racine, laquelle il faut d'abord extraire de la premiere Tranche, & joindre ce qui reſte dans une ſeule ligne avec la Tranche ſuivante. 3°. Il faut élever la premiere Racine trouvée à une Puiſſance d'un degré inferieur puis multiplier cette Puiſſance de la premiere Racine par ſon Coëfficient, & diviſer par ce Produit tout ce qui ſe trouve depuis la premiere Colomne de la Tranche ſuivante en-delà incluſivement. 4°. Pour s'aſſurer ſi le Quotient de cette Diviſion eſt la ſeconde Racine, il faut former tous les Produits dont cette Puiſſance eſt compoſée, & après les avoir agencez en avançant toûjours à chaque fois d'une Colomne à la droite, en faire la ſomme totale, & tirer cette ſomme de ſa Tranche & de ce qui la precede.

EXEMPLE.

28. 6436343 eſt une 5e Puiſſance. Pour en extraire la Racine, je fais deux Tranches, dont celle de la droite renferme cinq Colomnes. Celle

Digitized by Google

de la gauche qui ſe trouve n'en contenir que deux renferme la 5e Puiſſance de ma premiere Racine, laquelle je juge fort petite, puiſque la 5e Puiſſance n'exede pas deux Colomnes.

La 5e Puiſſance la plus approchante de 64, c'eſt 32, dont la Racine eſt 2. J'ôte 32 5e Puiſſance de 2, il me reſte 32, à quoi je joins la Tranche ſuivante pour avoir dans une ligne 3236343.

J'éleve 2 à ſa 4e Puiſſance, j'ai 16; je multiplie 16 par le Coëfficient 5, & par ce Produit je diviſe 323. J'ai bien d'abord pour Quotient 4; mais je m'apperçois bien-tôt que cette ſeconde Racine eſt trop grande pour être la veritable, voila pourquoi je deſcens à 3, & par le moïen de ces 2 Racines 2 + 3, je forme 5 Produits qui égalent ce qui me reſte de mon Cube.

64 | 3 6 3 4 3 (23
3 2 |
3 2 3 6 3 4 3
240 = 5a⁴b
720 = 10a³bb
1080 = 10aabb
810 = 5ab⁴
243 = b⁵
3 2 3 6 3 4 3

29. Les expreſſions des Puiſſances ſont des expreſſions de chimeres, ou des expreſſions de Quantitez réelles. Or comme dans la Nature corporelle, nous ne connoiſſons rien au-delà du Cube, que doit-on dire des Puiſſances Superieures à la troiſiéme?

Elles n'expriment pas des Grandeurs d'une nature differente entr'elles, comme la Surface differe de la Ligne, & le Cube de la Surface; mais elles expriment certains rapports que peuvent avoir entr'elles des Grandeurs de même nature.

30. J'ai déja remarqué que quand je multiplie *b* par *b*, je forme un Produit *bb* qui contient autant de fois *b* que *b* contient l'unité. J'ai établi cette verité d'une maniere très-ſimple dans l'Arithmetique.

Digitized by Google

Quand donc j'ai donné le nom de *b* à une ligne, & que j'ai pris dans la ligne *b* une petite portion *c*, que je regarde comme l'unité. Si je tire une 3e ligne qui contienne la ligne entiere *b*, comme cette ligne *b* contient ſa portion *c*, j'appellerai cette 3e ligne *bb* : & ſi j'en tire une 4e qui contienne la 3e *bb*, comme cette 3e contient la ligne *b*, ou comme la ligne *b* contient l'unité *c*, j'appellerai cette 4e ligne b^3.

31. Je prendrois de même dans un Quarré *ABCD* que j'appellerois *b* une petite portion quarrée, que j'appellerois *c*, & je m'éleverois de ce Quarré à des Quarrez plus grands, ſuivant les rapports de *c* à *b*, de *b* à *bb*, de *bb* à b^3, &c.

32. Le Corps n'a que trois dimenſions ; ainſi en prenant la longueur pour Racine, & l'appellant premiere Puiſſance, la troiſiéme aboutira au Cube, & au-delà il n'y a rien à multiplier pour la dimenſion de l'étenduë. Mais en multipliant les Cubes formez par la vîteſſe de leur mouvement, ſi le nombre qui exprime cette vîteſſe eſt égal à celui qui exprime la Racine du Cube, leur quantité de mouvement ſe trouvera exprimée par un nombre qui ſera une 4e Puiſſance : ſi leur peſanteur ſpecifique s'exprime encore par le même nombre que la Racine, l'on pourra faire une 4e multiplication qui l'élevera à une 5e Puiſſance.

33. La ſeconde & la troiſiéme Puiſſance ont reçû les noms de *Quarré* & de *Cube*, parce qu'effectivement elles ſe forment comme les Quarrez & Cubes : & comme les autres Puiſſances ſe compoſent de la ſeconde & de la troiſiéme, on leur a donné des noms tirez de leur generation, & en retenant les noms de Quarré pour la ſeconde Puiſſance, de Cube pour la troiſiéme, on a appellé

Digitized by Google

la quatriéme Quarré de Quarré, la cinquiéme quarré Cube ou Surſolide, la ſixiéme Cubocubique, mais ces noms métaphoriques ont produit de la confuſion.

Il y en a qui faiſant d'inutiles efforts pour s'imaginer dans les Corps quelque choſe qui paſsât le Cube, ont pris occaſion de regarder ces noms comme des noms de chimeres, & d'accuſer les Mathématiciens de tomber dans un défaut pareil à celui des anciens Scholaſtiques, en courant comme eux après des ombres, & faiſant parade de mots qui ne ſignifient rien de réel : Mais ceux qui parlent ainſi, ne font pas eux-mêmes aſſez d'attention à ce qu'ils diſent, & ne conſiderent pas aſſez que la quantité en general, & manifeſtement les Nombres, peuvent, par la Multiplication, s'élever ſans ceſſe de degrez en degrez.

34. Quand la Racine d'une Puiſſance remplit plus d'une Colomne, chaque Colomne eſt élevée dans le Produit à une Puiſſance du même nom que le Produit total : outre cela entre la Puiſſance d'une Colomne & la Puiſſance de l'autre, il y a autant de Complemens que la Puiſſance a de degrez par-deſſus la Racine ; ſçavoir 1 dans le Quarré, 2 dans le Cube, ainſi du reſte.

Quand une Racine eſt ſuivie de zero exprimé ou ſous-entendu, ſon Quarré ſera auſſi ſuivi de zero exprimé ou ſous-entendu, & le Nombre des zeros du Quarré ſera double du Nombre de ceux de la Racine ; celui du Cube ſera triple, celui de la quatriéme Puiſſance ſera quadruple, & ainſi conſecutivement ſuivant les noms des Puiſſances.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

Des Rapports & des Proportions.

1. QUand ou compare deux Grandeurs on fait attention, ou ſur l'excès dont l'une ſurpaſſe l'autre, ou ſur la maniere dont l'une contient l'autre, ou en eſt contenuë : Le premier de ces Rapports s'appelle *Raiſon Arithmetique*, & le ſecond *Raiſon Geometrique*. Quand je compare 5 avec 3, & que je fais attention à l'excès de 5 par-deſſus 3, cet excès qui eſt 2, eſt appellé le Rapport ou la *Raiſon Arithmetique* de 5 à 3; mais ſi j'ai égard à la maniere dont 5 contient 3, comme le tiers de 3 eſt contenu 5 fois en 5 ; contenir 5 fois le tiers, cela s'appelle le Rapport ou la *Raiſon Geometrique* de 5 à 3.

2. Quand on compare 4 quantitez, l'on fait 1°. attention au Rapport des 2 premieres, & 2°. au Rapport des 2 ſuivantes, & ſi ces deux Rapports ſont égaux, on dit que ces 4 Quantitez ſont proportionnelles, car l'égalité de raiſon s'appelle *Proportion*.

3. Si la premiere Grandeur ſurpaſſe la ſeconde ou en eſt ſurpaſſée du même excès & de la même quantité, dont la 3e ſurpaſſe la 4e ou en eſt ſurpaſſée, l'on a une *Proportion Arithmetique*; 15 ſurpaſſe 13 de 2, par conſequent la Raiſon Arithmetique de 15 à 13, eſt la même que celle de 5 à 3, voila pourquoi je dis qu'il y a proportion entre ces 4 nombres 15, 13, 5, 3.

4. Mais ſi la premiere Grandeur contient la ſeconde, ou en eſt contenuë, de la même manie-

te que la 3e renferme la 4e, ou s'y trouve renfermée, l'on aura une *Proportion Geometrique*. Pour avoir un nombre qui ſoit contenu par 15, de la même maniere que 5 contient 3, il faut que je prenne la cinquiéme partie de 15, 3 fois, j'ai 9; & puiſque comme 5 contient 5 fois le tiers de 3, 15 contient auſſi 5 ſois le tiers de 9, j'établis une proportion entre ces 4 nombres 5, 3, 15, 9.

5. Afin qu'on puiſſe dire que *b*, contient *c* d'une certaine façon, il n'eſt pas neceſſaire que *c* ſoit préciſément contenu pluſieurs fois exactement en *b*. Il ſuffit qu'une certaine partie, qui, repetée pluſieurs fois, égale *c*, ſoit contenuë exactement un certain nombre de fois en *b*.

Une telle partie, qui ajoûtée pluſieurs fois égale *c*, & ajoûtée auſſi pluſieurs fois égale *b*, s'appelle *Partie aliquote* de *c*, & auſſi Partie aliquote de *b*, & c'eſt la *Meſure commune* de ces deux Grandeurs.

Je ne repeterai pas ce que j'en ai dit dans ma Geometrie. Suivant cette idée, on dira qu'une petite quantité en contient une grande, 8 contiendra 28; c'eſt-à-dire 4 ſeptiéme partie de 28 ſera contenuë deux fois en 8. La moitié de 8 ſera égale à la ſeptiéme de 28, $\frac{1}{2}8 = \frac{1}{7}28$.

Les portions de diverſes quantitez qui ſe trouvent autant de fois l'une que l'autre dans les quantitez dont elles ſont les portions, s'appellent *Parties aliquotes ſemblables*. Telles ſont 2 par rapport à 14, 4 par rapport à 28, 7 par rapport à 49. Chacune eſt contenuë 7 fois dans ſon tout.

Quand une quantité contient pluſieurs fois exactement une autre, elle en eſt appellée *Multiple*, & la contenuë eſt la *Soumultiple*.

Digitized by Google

12 eſt Multiple de 3, & 3 Soumultiple de 12.

On ſe ſervoit autrefois de noms d'Art obſcurs & embarraſſans pour deſigner les Rapports. Par exemple le Rapport de 16 à 12 s'appelloit *Quadripartient de trois*, parce que 16 contenoit 4 fois la troiſiéme partie de 12. Il eſt plus net & plus court de dire que ce Rapport de 16 à 12 eſt le Rapport de 4 à 3.

6. Dans une Comparaiſon le premier Terme s'appelle *Antecedent*, & le ſecond *Conſequent*; & comme une proportion eſt compoſée de deux Comparaiſons, chaque proportion renferme 4 Termes, deux Antecedens & deux Conſequens.

7. Les Antecedens s'appellent *Homologues*, & les Conſequens de même; de ſorte que le premier Terme eſt Homologue avec le troiſiéme, auſſi-bien que le ſecond avec le quatriéme.

8. La qualité d'Antecedent n'eſt point attachée au plus grand nombre, ni la qualité de Conſequent au plus petit: Non ſeulement je puis établir la proportion Arithmetique 5. 3 :: 15. 13. Je puis de même établir celle-ci 3. 5 : 13. 15; car l'excès dont le premier eſt ſurpaſſé par le ſecond, à ſavoir 2, eſt préciſément le même que l'excès dont le 3e eſt ſurpaſſé par le 4e. Et après avoir établi cette Proportion Geometrique 5. 3 :: 15. 9, je puis de même établir celle ci 3. 5 :: 9. 15. car comme le premier contient 3 fois la 5e partie du ſecond, auſſi le 3e contient 3 fois la 5e partie du 4e.

9. Lorſque le Conſequent de la premiere Comparaiſon devient Antecedent de la ſeconde, ce terme, quoique ſeul, tient la place de deux, & une telle Proportion s'appelle *Continuë* ∴ 3. 5. 7, donnent une Proportion Arithmetique continuë; car celle-

ci

ci où 5 ne paroît qu'une fois pourroit s'exprimer ainſi 3. 5. 5. 7. & dans la Proportion Geometrique ∷ 8. 24. 72. ſignifie la même choſe que 8. 24 :: 24. 72.

CHAPITRE X.

Des Progreſſions Arithmetiques.

1. ON donne le nom de *Progreſſion* à une ſuite de Termes qui forment ſans interruption une *Proportion Continuë*, tellement que le premier eſt au ſecond, comme le ſecond au 3e, comme le 3e au 4e, ainſi de ſuite; de ſorte qu'à l'exception du premier & du dernier, chaque Terme ſe repete deux fois, & eſt Conſequent la premiere fois, & Antecedent la ſeconde.

2. La Progreſſion *Arithmetique* eſt compoſée d'une ſuite de Termes, dont chacun ſurpaſſe ſon precedent, ou en eſt ſurpaſſé du même excès.

3. Au lieu de donner à chaque Terme un nom particulier, deux Lettres peuvent ſuffire pour exprimer une Progreſſion auſſi longue que l'on voudra. Par exemple, au lieu de mettre b pour le premier & x pour le dernier Terme, & deſigner les 18 qui ſont entr'eux chacun par ſa Lettre, j'appelle z la difference qui regne dans la Progreſſion, de ſorte que ſi elle va en augmentant, le premier Terme étant b, le ſecond ſera $b+z$, le 3^e $b+2z$, le 4^e $b+3z$, & ainſi de ſuite : car quand je dis ∷ $b.^{1}\ b+z.^{2}\ b+2z.^{3}\ b+3z.^{4}\ b+4z.^{5}\ b+5z.^{6}\ b+6z.^{7}\ b+7z.^{8}$ Il eſt viſible que le 3e de ces Termes ſurpaſſe le ſecond du même excès z dont il eſt

Digitized by Google

ſurpaſſé par le 4e, & que ce 4e eſt encore ſurpaſſé par le 5e de ce même excès z, & quand j'écris ∴ b. b + z. b + 2 z, c'eſt comme ſi j'écrivois b. b + z :: b + z. b + 2 z.

4. Et ſi la Progreſſion va en diminuant le premier Terme étant b, le ſecond ſera b — z, le 3e b — 2 z; de ſorte que la Progreſſion qui va en décroiſſant, ſuit le même ordre que celle qui va en augmentant, ſi ce n'eſt que dans l'une les differences ſont precedées du Signe +, & dans l'autre du Signe —; l'on peut donc les marquer l'un & l'autre par cette Formule ∴ b. b ± z. b ± 2 z. b ± 3 z. b ± 4 z, &c.

5. L'on voit clairement que chaque Terme d'une Progreſſion contient le premier Terme, & avec le premier, la difference qui regne dans la Progreſſion repetée autant de fois qu'il y a de Termes avant lui. Dans le ſecond Terme elle ſe trouve une fois; car elle n'eſt precedée que d'un Terme, dans le 3e 2 fois, dans le 4e, qui eſt precedé de trois, trois fois, & par conſequent dans le centiéme qui eſt precedé de 99, 99 fois. Seulement faut-il ſe ſouvenir que dans les Progreſſions qui vont en diminuant, au lieu du Signe + il faut que les differences ſoient liées au premier Terme, par le Signe —. La difference n'eſt pas exprimée dans le premier Terme, mais elle l'eſt dans chacun des autres une fois de plus que dans le precedent : ſi elle étoit exprimée dans le premier Terme, elle ſe trouveroit dans le 10e, 10 fois, dans le 24e, 24 fois; mais puiſqu'elle n'eſt pas exprimée dans le premier, il faut rabbatre une fois la difference dans chacun de ces Nombres; il faut donc diminuer le Nombre qui exprime l'ordre d'un Terme dans la Progreſſion; c'eſt-à-dire, le

Digitized by Google

quantiéme où il ſe trouve : il faut, dis-je, 1°. diminuer ce Nombre d'une unité, 2°. prendre la difference autant de fois que l'unité ſe trouve dans ce Nombre ainſi diminué. 3°. Il faut ajoûter le premier Terme à la ſomme de ces differences, & l'on aura le Terme propoſé. Par exemple, le 32 Terme contient la difference 31 fois, & ſi à 31 differences je joins le premier Terme, j'aurai le 32e.

6. Dans une Progreſſion la ſomme des deux extrêmes, c'eſt-à-dire du premier & du dernier Terme, eſt égale à la ſomme de deux autres Termes, dont l'un eſt auſſi près du premier que l'autre l'eſt du dernier ; c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend les Termes d'une Progreſſion Arithmetique deux à deux, pourvû que les deux Termes, raſſemblez en une ſeule ſomme, ſe trouvent dans la Progreſſion à égale diſtance, l'un du premier, & l'autre du dernier Terme ; toutes ces ſommes ſeront égales entr'elles, auſſi-bien que l'aſſemblage du premier & du dernier. Pour le démontrer appellons le premier Terme b, & le dernier Terme x, & donnons à deux autres les noms de g & de p ; de maniere que g ſe trouve placé dans la Progreſſion à la même diſtance de b que p l'eſt de x ; c'eſt-à-dire, que l'on compte autant de Termes entre b & g, qu'entre p & x. Je dis que $b + x$ eſt préciſément égal à $g + p$; car déja $b + x$ contiennent chacun une fois le premier Terme, & la ſomme $g + p$ le contient auſſi deux fois. Reſte donc à prouver que la difference ſe trouve dans x ſeul autant de fois que dans $g + p$; & c'eſt ce qui eſt manifeſte, puiſqu'il y a autant de Termes depuis b juſques à g, que depuis p juſques à x ; & autant que g contient de fois la difference, au-

Digitized by Google

tant x la contient par-deſſus p. Pour mettre ce raiſonnement dans une entiere évidence, nous irons de parties en parties. 1°. $b + x$ eſt une ſomme compoſée de l'aſſemblage du premier Terme & de l'aſſemblage des differences, & $g + p$ eſt auſſi compoſé de deux parties, dont l'une eſt un aſſemblage de deux fois le premier Terme, & l'autre un aſſemblage de differences. Je prouverai d'abord que le premier Terme eſt contenu autant de fois en $b + x$, qu'en $g + p$; car puiſque chaque Terme contient une fois le premier (par l'Artic. 5ᵉ) $b + x$ le contient 2 fois, $g + p$ le contient auſſi 2 fois. 2°. Reſte à prouver que la difference qui regne dans la Progreſſion eſt contenuë en $b + x$ préciſément autant de fois qu'en $g + p$: pour cet effet, 3°. comme b ne contient point la difference, il faut que x ſeul la contienne autant que $g + p$. Or x étant plus grand que p, il contient déja le premier Terme & la difference autant de fois que p, & outre cela un certain excès compoſé d'un certain nombre de differences. Quel eſt ce nombre de differences ? La difference ſe trouve en x de plus qu'en p, autant de fois que l'on compte de Termes depuis p juſques en x. Or l'on compte autant de Termes depuis b juſques en g, que depuis p juſques en x : Donc l'excès des differences de x par-deſſus les differences de p, eſt égal à la ſomme des differences de g, puiſque x contient la difference par-deſſus p autant de fois qu'il y a de Termes de b en g, & par conſequent autant de fois que g. Si la Progreſſion alloit en diminuant, pour établir la même Démonſtration, il faudroit dire de b ce que nous avons dit de x, & de g ce que nous avons dit de p; ou pour ne rien changer dans les Termes, il n'y auroit

Digitized by Google

qu'à appeller le premier x & le dernier b, le plus proche du premier ſeroit p, & le plus proche du dernier, à la même diſtance que p, ſeroit g.

Si au lieu d'exprimer les Termes de la Progreſſion chacun par une Lettre diſtinguée, l'on n'emploie que deux Lettres, dont l'une exprime le plus petit Terme, & l'autre la difference, la Demonſtration du Problême ſaute aux yeux, car ſi j'ai la Progreſſion $\div\div b.\ b+1c.\ b+2c.\ b+3c.\ b+4c.\ b+5c.\ b+6c.\ b+7c.\ b+8c.\ b+9c.\ b+10c.\ b+11c.\ b+12c.$

Il eſt viſible que les deux extrêmes $2b+12c = 2b+12c$, ſomme du ſecond & du penultiéme, comme auſſi $2b+12c$ ſomme du 5e & du 9e, lequel eſt éloigné du dernier de 5 rangs, comme le 5e l'eſt du premier.

7. Lorſque dans une Progreſſion Arithmetique, l'on prend le premier & le dernier Terme pour en faire une ſeule ſomme, & que l'on raſſemble de même le ſecond & le penultiéme : lorſque l'on joint encore en une ſomme le troiſiéme & l'antepenultiéme, ainſi conſecutivement, faiſant toûjours une ſeule ſomme de deux Termes également éloignez des extrêmes. 1°. Toutes ces ſommes de Termes pris deux à deux, réünies enſemble, forment la ſomme de tous les Termes. 2°. Chacune de ces ſommes eſt égale à la ſomme des deux extrêmes. 3°. Si par conſequent l'on prend la ſomme des deux extrêmes autant de fois que l'on a fait de ſommes qui lui ſont égales : c'eſt-à-dire, ſi l'on multiplie la ſomme des deux extrêmes, par le nombre de ces ſommes de Termes, pris deux à deux, l'on aura la ſomme entiere de la Progreſſion. 4°. Et comme chaque ſomme eſt compoſée de deux Termes, le nombre de ces ſommes égale

Digitized by Google

la moitié du nombre des Termes de la Progreſſion. D'où il ſuit 5°. que ſi l'on multiplie le premier & le dernier par la moitié du nombre des Termes de la Progreſſion, l'on aura juſtement la ſomme, ou la valeur de toute la Progreſſion.

8. Quand le nombre des Termes eſt impair, celui du milieu double eſt égal à la ſomme des deux extrêmes; car doublé il contient 2 fois le premier & 2 fois autant la difference qu'il y a de Termes avant lui; c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a avant lui & après lui, & par conſequent autant qu'il y en a avant le dernier. Ainſi la ſomme de ce Terme moïen, pris 2 fois, contient 1°. 2 fois le premier Terme, 2°. Deux fois autant la difference qu'il y a de Termes avant lui; & puiſqu'il y a 2 fois autant de Termes avant le dernier, qu'avant le moïen, la ſomme du moïen pris 2 fois contient la difference autant de fois qu'il y a de Termes avant le dernier, & par conſequent autant de fois que le dernier la contient. La ſomme du Terme moïen pris 2 fois, eſt donc égale au dernier Terme, quant au nombre des differences, & elle lui ſeroit tout-à-fait égale, ſi le dernier Terme contenoit auſſi deux fois le premier, au lieu qu'il ne le contient qu'une fois; joignez donc le premier Terme au dernier, vous aurez une ſomme égale au moïen doublé.

Quand donc j'ai 13 Termes ſi je prens le moïen (qui eſt en ce cas le 7e) 2 fois, & que des 12 autres je faſſe 6 ſommes en les prenant 2 à 2, j'aurai 7 ſommes égales entr'elles, & égales chacune à la ſomme du premier & du dernier Terme: ſi donc je prens 7 fois l'une de ces ſommes, comme par exemple, celle du premier & du dernier, j'aurai la valeur des 7. Il faut donc quand

Digitized by Google

le nombre des Termes eſt impair, multiplier la ſomme du premier & du dernier par la moitié du nombre des Termes (laquelle moitié eſt ici $6 + \frac{1}{2}$) & l'on aura la ſomme de toute la Progreſſion.

Si je multiplie $2b + 12c$ par $6\frac{1}{2}$, j'aurai $13b + 78c$ ſomme de toute la Progreſſion, dont le 1^r^ Terme eſt b & la difference c, car cette Progreſſion eſt compoſée de 6 aſſemblages (dont chacun monte à $2b + 12c$.) plus le terme moïen.

9. Dans les Progreſſions l'on peut chercher cinq choſes, le *premier* Terme, le *dernier* Terme, la *difference*, le *nombre* des Termes, & la *ſomme* des Termes; il s'agit de trouver l'une de ces cinq choſes quand on en connoît trois autres.

10. *Si l'on connoît le premier Terme, la difference & le nombre des Termes, pour avoir le dernier*, il n'y a qu'à joindre au premier Terme, la difference priſe autant de fois qu'il y a de Termes dans la Progreſſion moins un.

Demonſtration. Le nombre des Termes, qui precedent le dernier, eſt égal au nombre des Termes de la Progreſſion moins un; ou le nombre qui exprime la multitude des Termes de la Progreſſion, ſi on le diminuë de l'unité, égalera le nombre des Termes qui precedent le dernier. Donc prendre la difference autant de fois qu'il y a d'unitez dans le nombre des Termes de la Progreſſion, diminué lui-même d'une unité, c'eſt prendre la difference autant de fois qu'il y a de Termes avant le dernier: or le dernier eſt un compoſé du premier & de la difference priſe ce nombre de fois-là, ou multipliée par ce nombre; car multiplier a par b, c'eſt prendre a autant de fois qu'il y a d'unitez en b.

Digitized by Google

EXEMPLE.

Le premier Terme eſt 7, la differenee 12; il y a 15 Termes : Donc le dernier eſt $=7+12\times14$.

12
14
48
12
168

Donc le dernier Terme eſt $=7+168=175$.

Si l'on vouloit ſavoir la valeur du 7e Terme, il n'y auroit qu'à multiplier la difference par $7-1=6$. $12\times6=72$. D. $72+7=79$: c'eſt le 7e Terme.

II. *Si l'on a le premier Terme, la difference & la ſomme des Termes, pour trouver le dernier Terme*, il faut prendre 2 fois le premier, 2°. à ce premier pris 2 fois ajoûtez la difference pluſieurs fois, 3°. augmenter ce nombre de fois que l'on prend la difference de l'unité, 4°. prendre la moitié de ce nombre, compoſé de l'unité & du nombre des fois que l'on a pris la difference, & multiplier par cette moitié le premier Terme doublé, avec les differences qu'on lui a ajoûtées, ſi le Produit égale la ſomme des Termes, le multiplié contiendra la ſomme du premier & du dernier, de laquelle pour avoir le dernier, il n'y auroit qu'à ôter le premier.

EXEMPLE.

J'ai pour premier Terme 3, pour difference 2, pour ſomme 168; je ſouhaite de connoître le dernier Terme d'une Progreſſion, qui, raſſemblée monte à 168, en commençant par 3, & en montant par 2, 1°. Je double le premier Terme, &

Digitized by Google

j'ai 6, cette ſomme contient déja une partie de l'aſſemblage du premier & du dernier Terme, & pour avoir cet aſſemblage entier, il faut y joindre la difference priſe un certain nombre de fois. J'eſſaïe donc ſi ce ne ſeroit point 11. 11 fois 2, c'eſt 22. 22 & 6, c'eſt 28. De ſorte que ſi j'ai deviné juſte 28 ſera la ſomme du premier & du dernier terme : mais ſi j'ai deviné juſte le nombre des termes ſera 11 + 1, dont la moitié eſt 6, par conſequent ma Progreſſion ſera compoſée de 6 couples égales chacune à 28. Pour m'en aſſurer je multiplie 28 par 6, j'ai 168 ; donc j'ai rencontré juſte : ſi j'avois pris la difference ſeulement 7 fois, la ſomme du premier & du dernier ne ſeroit montée qu'à 20. Il n'y auroit eu que 8 termes, & par conſequent 4 couples égales chacune à 20, ce qui ne faiſant pas ma ſomme, m'avertit qu'il faut augmenter le nombre des termes. Si au contraire j'avois pris la difference 13, la ſomme du premier & du dernier ſeroit montée à 32 ; & comme la Progreſſion auroit été compoſée de 14 termes, elle auroit par conſequent 7 couples égales chacune à 32, ce qui excedant 168, m'apprend que j'aurois dû prendre la difference moins de fois que je n'ai fait.

Il peut arriver que le nombre des termes ſera impair, & alors la ſomme de la Progreſſion égalera le premier & le dernier terme, multiplié par la moitié du nombre des termes qui ſera une Fraction ; c'eſt-à-dire, la ſomme de la Progreſſion égalera pluſieurs couples, & la moitié d'un couple. Par exemple, ſi mon premier terme eſt 5, la difference 3, & la ſomme 220 ; je trouverai ou heureuſement tout d'un coup, ou après pluſieurs repriſes, que pour avoir la ſomme du premier & du

Digitized by Google

dernier terme, je dois 1°. doubler le premier, cela me donne 10. 2°. ajoûter à 10 la difference 3 priſe 10 fois, & j'ai 40. 3°. Comme dans cette Progreſſion il doit ſe rencontrer 11 termes, la ſomme de la Progreſſion vaudra 5 fois 40, plus la moitié de 40, c'eſt-à-dire 220. Si la Progreſſion alloit en diminuant, pour avoir le dernier terme, il faudroit retrancher du premier terme la difference, certain nombre de fois, le reſte marqueroit le dernier terme.

EXEMPLE. J'ai pour ſomme de la Progreſſion 4284, pour premier terme 324, pour difference 12. Je procede en eſſaïant, ou heureuſement du premier coup, ou après pluſieurs repriſes, j'ôte de 324 la difference 12 priſe 20 fois; c'eſt-à-dire, j'ôte 240 de 324, il me reſte 84 pour dernier terme. Je joins en une ſomme le premier 324 & le dernier 84, j'ai 408 : Et comme j'ai pris la difference 20 fois; c'eſt-à-dire, qu'il y a 21 termes dans cette Progreſſion : elle eſt donc compoſée de 10 paires dont chacune égale 408, & outre cela la moitié de 408. 408 multiplié par 10 donne 4080, & ſi à ce Produit je joins 204, moitié de 408, j'aurai 4284 la ſomme de la Progreſſion.

L'Analyſe fournira une voie plus nette & plus prompte de reſoudre ce Problême, mais dans la vûë de n'omettre ici aucun cas, nous en avons voulu donner cette ſolution.

12. Mais ſi ce Produit eſt plus petit que la ſomme des termes, il faudra prendre la difference plus de fois que l'on n'a fait; ſi au contraire ce même Produit excede la ſomme des termes, il faudra prendre la difference moins de fois, & prendre ainſi en eſſaïant, juſques à ce que l'on ait trouvé juſte.

Digitized by Google

13. *Si l'on a la difference, le nombre des termes, & la ſomme des termes, pour trouver le dernier terme*, il faut 1°. diviſer la ſomme des termes par la moitié du nombre des termes, & le Quotient donnera la ſomme du premier & du dernier, 2°. De cette ſomme il faut retrancher la difference priſe autant de fois qu'il y a de termes dans la Progreſſion moins un, & ce qui reſtera, vaudra 2 fois le premier terme; par conſequent la moitié de ce reſte ajoûté aux differences, donne le dernier.

Demonſtration. J'ai pour ſomme 4284, pour difference 12, pour nombre des termes 21. Je ſai que la ſomme des termes eſt un Produit du premier & du dernier par la moitié de 21 : ſi donc je diviſe le Produit 4284 par la moitié de 21, l'une de ſes Racines, j'aurai pour Quotient l'autre Racine; ſavoir la ſomme du premier & du dernier terme. Au lieu de diviſer 4284 par la moitié de 21, je diviſe par 21, 8568, double de 4284; le Quotient 408 me découvre la ſomme du premier & du dernier terme.

Puiſqu'il y a 21 termes, cette ſomme 408 contient 20 fois la difference 12; c'eſt-à-dire, 240, & outre cela le premier terme pris 2 fois : ſi donc j'ôte 240 de 408, le reſte 168 contiendra le premier terme 2 fois. Donc ſi à 84, moitié de 168, j'ajoûte 20 differences, j'aurai pour dernier terme 324 : ſi la Progreſſion alloit en diminuant 84 ſeroit le dernier terme, & 324 le premier.

14. *Si l'on a le premier terme, le nombre des termes, & la ſomme des termes, pour découvrir le dernier*, il faut diviſer la ſomme des termes par la moitié du nombre des termes, & l'on aura

Digitized by Google

la ſomme du premier & du dernier, de laquelle, ſi l'on ôte le premier, reſtera le dernier.

Demonſtration. Le premier terme eſt 7, le nombre des termes 12, la ſomme de la Progreſſion 282.

Puiſqu'il y a 12 termes, 282 ſomme de la Progreſſion, eſt compoſée de 6 parties dont chacune égale la ſomme du premier & du dernier; ſi donc je diviſe 282 par 6, j'aurai la ſomme du premier & du dernier pour Quotient; ce Quotient eſt 47 : ôtez-en le premier terme 7, reſtera 40 pour le dernier.

15. *Pour trouver le premier terme, quand on a la difference, le nombre des termes & la ſomme*, ſi l'on diviſe la ſomme par la moitié du nombre des termes, le Quotient donne la ſomme du premier & du dernier, de laquelle ſomme, ſi l'on ôte la difference priſe autant de fois qu'il y a de termes moins un, reſtera le double du premier terme.

Demonſtration. La difference eſt 5, le nombre des termes eſt 11, la ſomme de la Progreſſion 363.

Cette ſomme eſt un Produit du premier & du dernier terme par la moitié du nombre des termes: ſi donc je diviſe le Produit 363 par la moitié de 11, l'une de ſes Racines (ou ſi je diviſe 726 par 11) j'aurai pour Quotient l'autre Racine 66 ſomme du premier & du dernier terme. Puiſqu'il y a 11 termes cette ſomme contient 10 fois la difference 5, & 2 fois le premier terme; ſi donc j'ôte 50 de 66, il me reſtera 16, double du premier terme.

16. *Pour trouver le premier terme, quand on a la difference, le nombre des termes & le dernier terme*, il n'y a qu'à ôter du dernier la dif-

Digitized by Google

ference priſe autant de fois qu'il y a de termes avant ce dernier, & le reſte donnera le premier.

Demonſtration. La difference eſt 5, le dernier terme 58, & le nombre des termes 11 : le dernier terme contient donc la difference 5 priſe 10 fois, & outre cela le premier terme. Donc ſi de 58, dernier terme, j'ôte 50, ſomme des differences, reſtera 8 pour premier terme.

17. *Pour trouver le premier terme, quand on a la difference, le dernier terme, & la ſomme des termes*, il faut ajoûter au dernier terme un nombre, & diviſer par cette ſomme la ſomme des termes. Si l'on a rencontré juſte, le Quotient donnera la moitié du nombre des termes; & pour s'en aſſurer il faut doubler ce Quotient, puis en ôter un, & par ce nombre multiplier la difference : lequel Produit ôté du dernier terme, reſtera préciſément une Grandeur égale à celle qu'on avoit d'abord ſuppoſée pour premier terme : mais ſi ce qui reſte eſt plus grand, c'eſt une preuve que la Grandeur que l'on avoit ſuppoſée pour premier terme étoit trop petite; comme au contraire ſi ce qui reſte eſt plus petit que la Grandeur ſuppoſée, il faudra en choiſir une moins grande pour l'ajoûter au dernier terme, afin d'en faire le Diviſeur de la ſomme des termes. La ſomme eſt 363, le dernier terme 58, la difference 5 : Je ſouhaite de connoître le premier terme, je ſuppoſe au hazard que ce premier terme eſt 8. Donc 66 ſera la ſomme du premier & du dernier. Donc diviſant par 66 la ſomme des termes 363, j'ai pour Quotient $5\frac{1}{2}$, la moitié du nombre des termes; il y a donc 11 termes, & par conſequent le dernier 58 contient 10 fois la difference; il con-

Digitized by Google

tient donc 50, & outre cela le premier terme, & ainſi j'avois rencontré juſte en ſuppoſant 8 pour premier terme. D'autres nombres au-deſſus ou au-deſſous de 8 n'auroient pas juſtifié ma regle ; & ſans faire l'eſſai de cette juſtification, toutes les fois que le Quotient doublé ne formera pas un nombre entier, c'eſt une preuve que l'on a mal ſuppoſé.

18. *Pour trouver le premier terme, quand on a le dernier, le nombre des termes, & la ſomme des termes*, il faut diviſer la ſomme des termes par la moitié du nombre des termes, & l'on aura la ſomme du premier & du dernier, de laquelle ôtant le dernier reſtera le premier.

Demonſtration. La ſomme de la Progreſſion c'eſt 333, le dernier terme 69, le nombre des termes 9. 333 eſt le Produit du premier & du dernier, par la moitié du nombre des termes. Donc diviſant 333 par l'une de ſes Racines, qui eſt la moitié de 9 (ou ce qui revient au même, diviſant 666 par 9) le Quotient 74 m'indique la ſomme du premier & du dernier terme, de laquelle ôtant le dernier 69, reſte le premier 5.

19. *Pour trouver la difference, quand on a le premier terme, le dernier, & le nombre des termes*, il faut 1°. ôter le premier du dernier, & ce qui reſte, il faudra le diviſer par le nombre des termes, diminué d'une unité, le Quotient donnera la difference. Le premier terme eſt 5, le dernier 69, le nombre des termes 9. Après avoir ôté 5 de 69, le reſte 64 contiendra la difference priſe autant de fois qu'il y a de termes avant le dernier. Or il y en a 8, dont 64 contient la difference 8 fois; & 64 diviſé par 8 donnera pour Quotient la difference 8.

Digitized by Google

20. *Pour trouver la difference, quand on a le premier terme, le nombre des termes, & la ſomme des termes*, il faut diviſer la ſomme par la moitié du nombre des termes; du Quotient l'on ôtera 2 fois le premier terme, & le reſte ſera diviſé par le nombre des termes, diminué de l'unité, le Quotient donnera la difference. La ſomme des termes eſt 333, le premier terme eſt 5, & le nombre des termes 9. Après avoir diviſé le Produit 333 par la moitié de 9, j'ai pour Quotient 74, ſomme du premier & du dernier terme, ſi j'en ôte 2 fois le premier terme, reſte 64, amas des differences dans le dernier terme, & cet amas diviſé par 9 — 1, donne pour Quotient 8.

21. *Pour trouver la difference, quand on a le premier & le dernier, & la ſomme des termes*, il faut diviſer cette ſomme par le premier & le dernier, le Quotient donnera la moitié du nombre des termes, lequel étant connu, l'on découvrira la difference par l'Article 19e. Le premier terme eſt 7, le dernier 43, la ſomme 250. Puiſque cette ſomme eſt le Produit du premier & du dernier terme joins enſemble, par la moitié du nombre des termes, ſi je diviſe 250, ſomme de la Progreſſion par 50, ſomme du premier & du dernier terme, j'aurai pour Quotient la moitié du nombre des termes : Ce Quotient eſt ici 5, je le double, & j'ai 10 pour le nombre des termes. De là je conclus que la difference eſt contenuë 9 fois dans le dernier terme, j'ôte donc de ce dernier terme, le premier qui eſt 7, & le reſte 36 je le diviſe par 9, le Quotient me donne la difference 4.

22. *Pour trouver la difference, quand on a le*

Digitized by Google

premier terme, le nombre des termes, & la ſomme, l'on diviſe cette ſomme par la moitié du nombre des termes, ce qui donne pour Quotient la ſomme du premier & du dernier; de laquelle ſi l'on ôte le dernier, reſtera le premier, qui étant connu, découvrira la difference par l'Article précedent. Un Homme donne de l'argent à 10 Perſonnes, au premier il donne 7 pieces, au ſecond davantage, au troiſiéme plus qu'au ſecond, & il augmente toûjours également juſques au 10e. Ce qu'il a donné monte à 250 pieces. Il s'agit de ſavoir de combien il a augmenté à chaque fois : ſi je diviſe 250, ſomme de la Progreſſion par 5, moitié du nombre des termes, le Quotient 50 renfermera la ſomme du premier & du dernier. De cette ſomme ſi j'ôte 14, c'eſt-à-dire 2 fois le premier terme, le reſte 36 contient l'amas des differences dans le dernier terme : or puiſqu'il y a 10 termes, la difference ſe trouve 9 fois dans le dernier, donc en diviſant le dernier 36 par 9, le Quotient 4 me donnera la difference que je cherche.

Remarque. *Je joins en un l'Exemple & la Demonſtration, afin de rendre mon Ouvrage moins long; & cet aſſemblage ne diminuë en rien la force de mes Demonſtrations, elles en ſont plus claires par les idées determinées des Exemples que je mêle, & elles ne laiſſent pas d'être univerſelles; car leur verité ne depend point de l'Exemple, & n'y eſt point attachée. On le ſentira ſi l'on ſaute les nombres déterminez qui s'y trouvent, &, ſans faire non plus d'attention à eux que s'ils étoient effacez, on lit avec attention la ſuite du raiſonnement.*

23. *Pour trouver le nombre des termes, quand*

on

Digitized by Google

on a le premier & le dernier & la difference, après avoir ôté du dernier le premier, il faut diviſer ce qui reſte par la difference; & ſi l'on ajoûte au Quotient un, l'on aura le nombre des termes, puiſque le dernier contient la difference autant de fois qu'il y a de termes dans la Progreſſion moins un. J'ai pour premier terme 7, pour dernier 43, pour difference 4; je veux découvrir le nombre des termes, 1°. du dernier 43, j'ôte une fois le premier 7, le reſte 36 contient l'aſſemblage des differences dans le dernier terme, & ce reſte diviſé par la difference 4, donne pour Quotient 9 le nombre des termes qui précedent le dernier, auxquels j'ajoûte un, pour conclure qu'en tout il y a 10 termes.

24. *Pour trouver le nombre des termes, quand on a le premier terme, la difference & la ſomme*, il faut 1°. doubler ce premier, 2°. y joindre pluſieurs fois la difference, 3°. diviſer par cette ſomme totale la ſomme de la Progreſſion : ſi le Quotient eſt un nombre, qui doublé, contienne le nombre des termes, l'on a ce que l'on cherche; & voici comment l'on s'en aſſurera : par ce nombre des termes, après l'avoir diminué de l'unité, on multipliera la difference, & on ajoûtera ce Produit au premier terme doublé, ſi cette ſomme égale celle que l'on avoit d'abord ſuppoſée pour premier & dernier terme, & par laquelle l'on avoit diviſé la ſomme des termes, l'on a rencontré juſte; mais ſi elle eſt plus petite, il faut recommencer l'Operation en prenant plus de fois la difference que l'on n'avoit fait; ſi au contraire elle eſt plus grande, il faudra prendre la difference moins de fois, & renouveller les Operations juſques à ce que l'on ſoit parvenu à l'égalité. Le premier ter-

Digitized by Google

me eſt 7, la difference eſt 4, & la ſomme 250 : je double le premier, & j'ai 14, commencement de la ſomme du premier & du dernier, pour laquelle achever, il n'y qu'à y joindre la difference un certain nombre de fois ; je prens 9 au hazard, ſi la difference eſt 4, j'ajoûte 36 à 14, & diviſant par 50 la ſomme 250, j'ai pour Quotient 5, je le double, & je conclus que ſi j'ai bien rencontré, il y a 9 termes avant le dernier ; & que par conſequent il renferme la difference 2 fois, ce qui s'accorde avec ma ſuppoſition.

Si j'avois pris la difference 10 fois, ou 8, ou 7, ou 11 fois, le Quotient doublé ne m'indiqueroit pas un nombre de termes conformes à ma ſuppoſition ; & même dans tous ces cas, ce Quotient doublé ne formeroit pas un nombre entier.

25. *Pour trouver le nombre des termes, quand on a la difference, le dernier, & la ſomme*, il faut ſuppoſer un premier terme, le joindre au dernier, diviſer la ſomme par cet aſſemblage, ſi le double du Quotient donne le nombre des termes, l'on a ce qu'on cherche ; & c'eſt de quoi l'on s'aſſurera par la Méthode ſuivante. On multipliera la difference par ce nombre des termes diminué de l'unité ; on ôtera ce Produit du dernier terme, & ſi ce qui reſte eſt égal au nombre que l'on avoit d'abord ſuppoſé pour premier terme, l'Operation eſt juſte : mais ſi ce reſte eſt plus petit ou plus grand, il faudra faire une autre ſuppoſition. Et pour ſuppoſer avec moins de hazard & de précipitation, il faut d'abord ôter le premier terme ſuppoſé du dernier, & voir ſi le reſte contient la difference un nombre précis de fois.

Le dernier terme eſt 43, la ſomme 250 & la difference 4 ; ſi je ſuppoſois pour premier terme

Digitized by Google

8, ou 9, ou 5, ou 10, les reſtes 35, 34, 38, 33, ne contiendroit point préciſément la difference 4; je ſuppoſe donc 11 pour premier terme, & l'ôtant du dernier 43, j'ai pour reſte 32 qui contient la difference 8 fois, 43 & 11 font 54, par ce nombre 54 il faut diviſer la ſomme 250; mais comme le Quotient doublé ne forme pas un nombre entier, je vois que j'ai mal ſuppoſé; je prens donc 7, & par la ſomme 50, aſſemblage de 7 & de 43, je diviſe 250, le Quoitient 5 m'apprend que la difference eſt contenuë 9 fois dans le dernier, lequel par conſequent eſt 7 + 36, ce qui convient au nombre donné 43.

26. *Quand on a le premier, le dernier terme & la ſomme, il eſt très-facile de dévouvrir le nombre des termes*, puiſqu'il n'y a qu'à diviſer la ſomme de la Progreſſion par la ſomme du premier & du dernier terme, le Quotient doublé donnera le nombre des termes.

27. *Pour trouver la ſomme, quand on a le premier terme, le dernier & le nombre des termes*, il n'y a qu'à multiplier le premier & le dernier par la moitié du nombre des termes.

28. *Pour trouver la ſomme, quand on connoît le premier terme, le dernier & la difference*, il faut 1°. ôter le premier du dernier, 2°. diviſer ce qui reſte par la difference, 3°. ajoûter un au Quotient, 4°. multiplier par la moitié de cette ſomme le premier & le dernier terme: cela eſt trop éclairci par les raiſonnemens précedens pour avoir beſoin de preuve.

29. *Pour trouver la ſomme quand on connoît le premier terme, la difference & le nombre des termes*, il faut 1°. multiplier la difference par le nombre des termes diminué de l'unité, 2°. ajoûter

Digitized by Google

à ce Produit le premier terme, cette ſomme donne le dernier, qui étant connu, manifeſte la ſomme par l'Article précedent.

30. *Pour trouver la ſomme quand on connoît la difference, le nombre & le dernier terme*, il faut chercher le premier par la Méthode de l'Article 16e, lequel trouvé, ſervira à manifeſter la ſomme par l'Article précedent. La difference eſt 5, le dernier terme 58, le nombre des termes 11; la difference eſt donc renfermée 10 fois dans le dernier, lequel par conſequent eſt compoſé de 50 & du premier terme, qui ſera ici 8; j'ajoûte le premier terme 8 à 58, & j'ai 66. Je multiplie cette ſomme du premier & du dernier par 5 & $\frac{1}{2}$, moitié du nombre des termes, ou ce qui revient au même, & rend l'Operation plus aiſée, je multiplie par le nombre entier des termes 11, 33, moitié de la ſomme du premier & du dernier terme, & j'ai 366 pour ſomme de la Progreſſion.

Remarque. *On doit s'être apperçû que toutes les Demonſtrations de ce Chapitre, roulent ſur une application continuelle de deux Principes.* 1°. *Que le dernier terme eſt compoſé du premier plus autant de differences qu'il y a de termes dans la Progreſſion moins un.* 2°. *Que la ſomme de la Progreſſion eſt le Produit de l'aſſemblage du premier & du dernier terme par la moitié du nombre des termes.*

31. Quand on ſouhaite de connoître la valeur d'un terme, dont on a indiqué la place dans la Progreſſion, comme par exemple, du dixiéme, du quinziéme, ou la ſomme de 10 ou de 15 termes, il n'y a qu'à conſiderer ce terme deſigné comme s'il étoit le dernier.

Digitized by Google

32. Lorſque la Progreſſion va en diminuant, les mêmes regles ſerviront, ſur tout ſi l'on conſidere le dernier terme, qui eſt le petit, comme s'il étoit le premier dans la Progreſſion qui eſt exprimée en nombres, mais quand elle eſt exprimée en Lettres, il faudra operer avec les Signes —, comme l'on opere avec les Signes + dans les Progreſſions qui vont en croiſſant.

33. Dans une Progreſſion Arithmetique qui va en diminuant, dès que l'on eſt parvenu à des ſommes de differences égales au premier terme, ou qui le ſurpaſſent, les termes deviennent des Grandeurs Négatives. Que la Progreſſion ſoit ∴ a. $a-b$. $a-2b$. $a-3b$. $a-4b$. $a-5b$. $a-6b$.

Si $a=4b$; $a-4b=0$, & $a-5b=0-b$, par conſequent la Progreſſion peut s'exprimer ainſi ∴ a. $a-b$. $a-2b$. $a-3b$. 0. $-b$. $-2b$.

Et en nombres ∴ 12. 12 — 3. 12 — 6. 12 — 9. 12 — 12. 12 — 15. 12 — 18. ou ∴ 12. 12 — 3. 12 — 6. 12 — 9. 0. — 3. — 6. ou ∴ 12. 9. 6. 3. 0. — 3. — 6.

34. Qu'on ait pour Progreſſion b. $b+c$. $b+2c$. $b+3c$. $b+4c$.

1°. La ſomme ſera $5b+10c$.

2°. Qu'on la multiplie par $8c$, c'eſt-à-dire par 8 fois la difference, on aura $40bc+80cc$.

3°. Qu'on quarre 2 fois le premier — la difference ici $2b-c$, on aura $4bb-4bc+cc$.

4°. Qu'on ajoûte ce Quarré à la ſomme multipliée par 8 fois la difference, on aura

$40bc+80cc+4bb$
$-4bc+\ 1cc$ $= 4bb+36bc+81cc.$

Digitized by Google

5°. Cette ſomme eſt un Quarré dont la Racine eſt $2b + 9c$.

6°. Otez-en c, c'eſt-à-dire une fois la difference, puis prenez la moitié du reſte.

7°. Vous aurez $b + 4c$, qui eſt le dernier terme.

J'ai $b.\ b + c$. La ſomme eſt $2b + c$. Je la multiplie par $8c$, & j'ai $16bc + 8cc$.

Je quarre $2b - c$, & j'ai $4bb - 4bc + cc$.

J'ajoûte ces deux ſommes, & j'ai $4bb + 12bc + 9cc$.

La Racine de ce Quarré eſt $2b + 3c$.

J'en ôte c, & prenant la moitié du reſte, j'ai $b + c$ pour mon dernier terme.

En effet ajoûtant $1cc$ à $8cc$, j'ai $9cc$ dont la Racine eſt $3c$. bc eſt le Produit des deux Racines b & c.

Et comme l'une eſt $2b$ & l'autre $3c$, il faut que ſon Coëfficient ſoit $12 = 2 \times 3 \times 2$, & cela arrive quand on ôte $4bc$ de $16bc$.

J'ai donc pris 8 afin d'avoir $8cc$, & qu'en y ajoûtant $1cc$, j'euſſent $9cc$.

Mais ſi j'ai $b.\ b + c.\ b + 2c$. La ſomme ſera $3b + 3c$, plus grande que la précedente de $b + 2c$.

Son Produit par $8c$ ſurpaſſera donc $16bc + 8cc$ de $8bc + 16cc$.

Or ajoûtant $1cc$ à $8cc + 16cc$, j'ai le Quarré ſuivant $25cc$.

Ajoûtant $8bc$ à $16bc$, j'ai $24bc$; ſi j'en ôte $4bc$, reſte à $20bc$, égal à $2b \times 2$ fois par $5c$. Otez c de la Racine $2b + 5c$, vous aurez $2b + 4c$, dont la moitié eſt $b + 2c$.

Dès-là à 24 j'ajoûte $24 + 1$, & j'ai 49. Dès-là à 48 j'ajoûte $32 + 1$, & j'ai 81.

35. J'ai une Progreſſion Arithmetique $a.\ a + b.\ a + 2b.\ a + 3b.\ a + 4b$.

Digitized by Google

Je veux avoir la ſomme des Quarrez de chaque membre.

1°. Il eſt certain que le Quarré du ſecond terme contient le Quarré du premier, + deux Produits du premier par la difference, + le Quarré de la difference.

2°. On aura donc déja $aa + 2ab + bb$.

3°. Le Coëfficient de la ſeconde Racine du 3e terme ſurpaſſant d'une unité le Coëfficient de la ſeconde Racine dn ſecond, ſon Quarré ſera le premier après le Quarré du ſecond, & le Coëfficient ſurpaſſera de deux unitez le Coëfficient du Quarré précedent.

4°. On aura donc

aa

$aa + 2ab + bb$

$aa + 4ab + 4bb$

Dès-là . . . . . $aa + 6ab + 9bb$.

Il en ſera ainſi de tous les autres.

Par conſequent, autant qu'il y a de termes dans la Progreſſion, autant de fois on prendra le Quarré du premier terme.

2°. On prendra dans la ſuite naturelle des nombres pairs, autant qu'il y a de termes dans la Progreſſion, moins un, & leur ſomme ſera le Coëfficient total de ab.

3°. On prendra dans la ſuite naturelle des Quarrez, en commençant depuis l'unité, autant de Quarrez qu'il y a de termes, moins un.

Leur ſomme ſera le Coëfficient total des bb.

On peut pouſſer les ſpeculations à l'infini. Plus on avance, plus les Combinaiſons ſe multiplient; & c'eſt en comparant les Quantitez compoſées & leurs Rapports, que l'on en voit ſans fin & ſans ceſſe naître d'autres. J'en donnerai encore quelques Exemples.

Digitized by Google

Propoſition. 36. Quand on a une Progreſſion Arithmetique dont le premier terme eſt l'unité, & la difference 2, on a la ſuite naturelle des nombres impairs, dont le premier 3 ſurpaſſe l'unité de 2, & le ſecond 5 ſurpaſſe encore le 3e de 2; car ajoûtant pair à impair, on a impair, puiſque l'un des nombres ſe partage en deux parties égales, & l'autre ne peut ſe partager en deux nombres entiers ſans qu'ils ſoient inégaux.

Le Quarré de l'unité, c'eſt l'unité même: le Quarré de 2, c'eſt 4, ſomme de l'unité & du premier impair 3. Le Quarré de 3, qui eſt le 3e des nombres, eſt 9, ſomme de 1, de 3, & de 5; les trois premiers impairs, & ainſi de ſuite. Si donc l'on a deux rangs, dont l'un contienne la ſuite naturelle des nombres, & l'autre la ſuite des impairs, la ſomme de tous les impairs de la droite à la gauche, égalera toûjours le Quarré du nombre qui ſera vis-à-vis de l'impair, & qui marque le quantiéme cet impair eſt dans la ſuite.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	

2 = 1 + 1, dont le Quarré eſt 1 + 2 × 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 3 + 1 = 4.
3 = 2 + 1, dont le Quarré eſt 4 + 2 × 1 × 2 + 1 = 4 (+ 1 + 3) + 4 + 1 (= 5)
4 = 3 + 1, & ſon Quarré eſt 9 + 2 × 3 × 1 + 1 = 9 + 7.

C'eſt-à-dire, le Quarré précedent, plus 2 fois ſa Racine, qui fait une ſomme paire, plus l'unité; ce qui acheve le nombre impair ſuivant.

Le 5e dont la Racine eſt 4 + 1 contient 1° le Quarré précedent = 1 + 3 + 5 + 7, 2°. 2 fois 4, qui eſt un nombre pair, + l'unité; c'eſt-à-dire, 2 unitez par deſſus le précedent.

Demonſtration. 37. Chaque nombre dans la ſuite des impairs contient deux fois celui qui le précede dans la

ſuite des nombres naturels plus l'unité.

Appellons celui qui précede un impair dans la ſuite naturelle a, l'impair ſera $2a+1$. Celui qui lui répondra, & ſera vis-à-vis de lui dans la ſuite des nombres naturels ſera $a+1$. Le Quarré de celui-ci ſera $aa+2a+1$. $aa=$ la ſomme des précedens; $2a+1$ eſt égal au Propoſé.

Donc la ſomme du Propoſé & des précedens, eſt $aa+2a+1$, ſomme du Propoſé, & de tout ce qui le précede dans la ſuite des impairs.

38. Comparons les Quarrez de deux Racines, dont l'une ſurpaſſe l'autre d'une unité. J'appellerois la premiere r, la ſeconde ſera $r+1$. Autre Demonſtration.

Le premier Quarré ſera rr, le ſecond $rr+2r+1$, qui ſurpaſſe le premier du double de la Racine de ce premier; ce qui eſt un nombre pair, plus de l'unité, ce qui fait l'impair. Quand donc j'ai le Quarré de 5, je ſai que le Quarré de $6=5+1$, ſurpaſſera celui de 5 de $2\times5+1=11$.

Le Quarré de 5 eſt ſous le cinquiéme impair, ſavoir 9, le ſuivant ſera ſous 11 ſixiéme impair. Or ſi 9 & ſes précedens ſont 25, 11 & ſes précedens ſeront 36.

39. Par la même Méthode, on verra que le Cube de $r+1$ ſurpaſſe le Cube de r, de la quantité $3rr+3r+1$ du triple Quarré de la premiere Racine, du triple de cette Racine & de l'unité. Propoſition & Demonſtration.

Le Cube de 1, c'eſt 1. Celui de 2 ſera donc $1+3+3+1=8$.

Celui de trois ſera $8+3\times4+3\times2+1=8+12+6+1=27$.

40. En toute Progreſſion Arithmetique, où la difference eſt l'unité, & où par conſequent les differences croiſſent ſuivant la ſuite naturelle des Propoſition.

Digitized by Google

nombres, le Quarré d'un terme qui ſuit de plus près le plus grand de la Progreſſion, moins le Quarré du premier, moins encore le nombre des termes, vaut au juſte deux fois la ſomme des termes.

Demonſtration. 41. Soit la Progreſſion $a.\ a+1.\ a+2.\ a+3$. Le Quarré de $a+4$, c'eſt $aa+8a+16$. Sa premiere partie aa eſt égale au Quarré du premier terme de la Progreſſion.

Le troiſiéme terme eſt égal au nombre des termes, qui eſt $4+12$.

Donc après avoir ôté de ce Quarré, le Quarré du premier terme (aa) plus le nombre des termes (4), reſte $8a+12$.

Or la ſomme des termes, c'eſt $a+a+3 \times 2$. $= 2a+2a+6 = \frac{1}{2}\ 8a+12$.

Quelque quantité qu'on me donne, & qui ſuive le dernier & le plus grand terme, elle ſera compoſée du premier terme, & d'un certain nombre de differences = au nombre des termes. Appellons le nombre des termes n, j'aurai donc toûjours $a+n$. Son Quarré ſera toûjours $aa+2an+nn$. Otez-en $aa+n$, reſtera $2an+nn-n$.

Or le premier terme eſt a, le dernier $a+n-1$; (car là où la difference eſt l'unité, la difference d (1) multipliée par le nombre des termes -1, eſt $n-1$.

La ſomme du premier & du dernier, eſt $2a+n-1$. Si je la multiplie par la moitié du nombre des termes; c'eſt-à-dire, par $\frac{1}{2}n$, j'aurai la ſomme des termes. Donc $2a+n-1 \times \frac{n}{2} = \frac{2an+nn-1n}{2}$ eſt la ſomme de la Progreſſion, & juſtement la moitié de $2an+nn-n$.

Digitized by Google

42. Dans une telle Progreſſion, le Cube du terme qui ſuit le dernier moins le Cube du premier, moins le nombre des termes, moins trois fois la ſomme des termes, eſt juſtement triple de la ſomme des Quarrez des termes, quarrez un à un. Propoſition.

1°. Le premier terme eſt a. Le dernier $a+n-1$. Celui qui le ſuit eſt donc $a+n$.

2°. Son Cube eſt $a^3+3aan+3ann+n^3$.

3°. Otez-en le Cube du premier terme, reſte $3aan+3ann+n^3$.

4°. Otez-en le nombre des termes, vous aurez $3aan+3ann+n^3-n$.

5°. Quand le premier terme eſt a, & le dernier $a+n-1$, la ſomme des termes eſt $2a+n-1\times\frac{n}{2}=\frac{2an+nn-1n}{2}$.

6°. Son triple eſt $6an+3nn-3n$.

7°. Otez cette ſomme de $3aan+3ann+n^3-n$, vous aurez $3aan+3ann+n^3-n-\frac{6an-3nn+3n}{2}=3aan+3ann+n^3-3an-\frac{3nn}{2}-n+\frac{3n}{2}$.

Si $n=5$, vous aurez $15aa\overset{+75a+125-\frac{75}{2}}{-15a-5}+\frac{15}{2}=15aa+60a+120-30$.

Les Quarrez ſeront

aa ..... Quarré de a
$aa+2a+1$ Quarré de $a+1$
$aa+4a+4=$ Q. de $a+2$
$aa+6a+9=$ Q. de $a+3$
$aa+8a+16=$ Q. de $a+4$

$5aa+20a+30$ le tiers de $15aa+60a+90$

Digitized by Google

CHAPITRE XI.

Proportion Geometrique.

1. ON appelle Expoſans d'une Raiſon les deux plus petits termes dans leſquels on la puiſſe énoncer, ainſi 3 & 2 ſeront les Expoſans de 12 & de 8, ou de 36 & de 24; de même 8 & 9 ſont les Expoſans de 24 à 27; car 24 contient 8 fois la 9e partie de 27, & de même 8 contient 8 fois la 9e partie de 9; mais 8 eſt le plus petit Antecedent qui contienne 8 fois la 9e partie de ſon Conſequent.

2. Comme la maniere dont un Antecedent contient ſon Conſequent eſt plus manifeſte, & ſe découvre plus aiſément dans des petits nombres que dans des grands, une des proprietez eſſentielles & un des caracteres d'un Expoſant, c'eſt de manifeſter la maniere dont l'Antecedent contient le Conſequent, ou en eſt contenu; d'où il s'enſuit que quand vous avez deux nombres, ſi vous ſouhaitez de découvrir l'Expoſant de la Raiſon qu'ils ont entr'eux, il n'y a qu'à diviſer l'un des termes par l'autre; car le Quotient indiquant la maniere dont le Diviſeur eſt contenu dans le Diviſé, indiquera par conſequent la maniere dont l'un de ces termes eſt contenu dans l'autre, ou la maniere dont celui-ci contient celui-là.

Tout Antecedent contient ſon Conſequent d'une certaine maniere, ou tout Antecedent contient un certain nombre de fois une certaine partie de ſon Conſequent. Chaque maniere de contenir forme

Digitized by Google

une Raiſon déterminée. Si l'Antecedent contient 3 fois la moitié du Conſequent, c'eſt une Raiſon : ſi l'Antecedent contient 5 fois le tiers du Conſequent, c'eſt encore une Raiſon, mais d'une autre eſpece. Si l'Antecedent contient 8 fois la 9e partie du Conſequent, ce ſera encore une 3e Raiſon, & l'on voit aiſément qu'il y en peut avoir de differentes eſpeces à l'infini.

Pourvû que les Antecedens & les Conſequens varient l'un & l'autre d'une certaine maniere, la même eſpece de Raiſon ſera exprimée par de differens nombres ; ainſi 14 & 20 d'un côté, & d'un autre 35 & 50, ou 21 & 30 appartiennent à la même eſpece de Raiſon ; car chacun des Antedecedens 14, 35, 21 contient 7 fois la 10e partie de ſon Conſequent 20, 50, 30.

EXEMPLES.

J'ai 12 & 36, je diviſe 36 par 12, le Quotient 3 m'apprend de quelle maniere 12 eſt contenu dans 36, ou il m'apprend que 36 contient 12, comme 3 contient 1 : que la Raiſon triple eſt la Raiſon de 36 à 12, & la Raiſon ſoutriple celle de 12 à 36.

J'ai 28 & 60, ſi je diviſe le plus grand par le plus petit, j'aurai pour Quotient $2 + \frac{1}{7}$, & réduiſant tout en ſeptiémes, j'ai pour Quotient $\frac{15}{7}$; la Raiſon de 15 à 7, c'eſt la Raiſon de 60 à 28, & la Raiſon de 7 à 15, eſt la Raiſon de 28 à 60.

Lorſque le Quotient eſt un nombre entier, ce Quotient peut être conſideré comme une Fraction,

Digitized by Google

dont le Numerateur eſt ce nombre même, & le Denominateur l'unité. Voila pourquoi quand j'ai deux nombres, & que je cherche l'Expoſant de leur Raiſon, il faut 1°. diviſer l'un d'eux par l'autre, 2°. exprimer le Quotient en une Fraction, 3°. le Numerateur de cette Fraction ſera à ſon Denominateur, comme le nombre diviſé eſt au Diviſeur.

EXEMPLE.

J'ai 24 & 6, ſi je diviſe 6 par 24, le Quotient ſera $\frac{6}{24}$ ou $\frac{1}{4}$, par conſequent comme 1 eſt à 4, ainſi le Diviſé 6 eſt au Diviſeur 24, & la Raiſon de 1 à 4, eſt l'Expoſant de celle de 6 à 24.

Si j'ai 24 & 32, diviſant celui-ci par celui-là, j'ai pour Quotient 1 & $\frac{8}{24}$ ou 1 & $\frac{1}{3}$, & raſſemblant cela en une ſeule Fraction, j'ai pour Quotient $\frac{4}{3}$. Donc la Raiſon de 4 à 3 exprime celle de 32 à 24, ou la Raiſon de 3 à 4 exprime celle de 24 à 32 : car ſi la Raiſon du Numerateur au Denominateur, exprime celle du Diviſé au Diviſeur, la Raiſon du Denominateur au Numerateur exprimera celle du Diviſeur au Diviſé.

3. Et puiſque ſi l'on prend le Diviſeur autant qu'il eſt contenu dans le Diviſé, ou, ſi l'on multiplie le Diviſeur par le Quotient, le Produit égalera le Diviſé même : il s'enſuit que dans une Raiſon, ſi l'on multiplie le terme diviſeur par l'Expoſant, on aura pour Produit l'autre terme : quand je diviſe 12 par 3, j'ai pour Expoſant 4, & 4 fois 3 c'eſt 12 ; & ſi au contraire je diviſe 3 par

Digitized by Google

12, j'ai pour Expoſant un quart & le quart de de 12 c'eſt 3 : & en general, ſi diviſant a par b, j'ai pour Quotient c, bc ſera $= a$; comme au contraire, ſi je diviſe b par a, & que j'aïe $3d$ pour Quotient $3ad = b$.

4. Lorſque deux Raiſons ſont égales, elles ont le même Expoſant; c'eſt-à-dire, que dans une Proportion l'Expoſant des deux premiers termes, eſt auſſi l'Expoſant des deux ſeconds, puiſque le premier contient le ſecond, comme le 3e contient le 4e. Si vous diviſez le premier par le ſecond, vous aurez un certain Quotient; & ſi vous diviſez le 3e par le 4e, vous aurez auſſi le même Quotient. De même, ſi vous diviſez le ſecond par le premier, vous aurez un certain Quotient, & ſi vous diviſez le 4^e par le 3^e, vous aurez le même Quotient.

EXEMPLES.

8. 32 :: 6. 24 : en diviſant 32 par 8, j'ai pour Quotient 4; & diviſant 24 par 6, j'aurai auſſi le même Quotient. Si je diviſe 8 par 32, j'ai pour Quotient $\frac{1}{4}$, & ſi je diviſe 6 par 24, j'aurai le même Quotient.

Quand j'ai 24. 32 :: 15. 20, ſi je diviſe 32 par 24, j'ai pour Quotient $\frac{4}{3}$, & ſi je diviſe 20 par 15, j'ai auſſi le même Quotient.

5. Reciproquement, ſi l'Expoſant des deux premieres Grandeurs eſt égal à l'Expoſant des deux dernieres, les Raiſons ſeront égales; car il y aura même maniere de contenir dans la premiere que dans la ſeconde.

6. Il ſuit de là que l'on peut exprimer les Grandeurs qui ſont en progreſſion, quelque nom-

Digitized by Google

bre qu'il y en ait, par deux Lettres ; car ſi a, b, c, d, e, f, ſont en progreſſion, & que g ſoit l'Expoſant de la premiere à la ſeconde, il le ſera encore de la 3e à la 4e, ainſi de ſuite. Je pourrai donc à la place de b, mettre $ag = b$, & à la place de bg, mettre agg, & à la place de $d = cg$, mettre ag^3, & conſecutivement.

7. Si $b.c :: d.f$ & $d.f :: m.p$, je dis que $b.c :: m.p$. car ſi nous appellons z l'Expoſant de la premiere Raiſon, ce même z ſera auſſi l'Expoſant de la ſeconde ; par conſequent j'aurai $b.bz :: d.dz$, & $d.dz :: m.mz$. Or ſi je compare d'un côté b & bz ; d'un autre m & mz, l'égalité de l'Expoſant z m'indiquera que ces Raiſons ſont égales ; car ſi je diviſe le Conſequent bz par l'Antecedent b, j'ai pour Quotient z ; & ſi je diviſe le Conſequent mz par l'Antecedent m, j'ai le même Quotient z. Donc en general deux Raiſons égales à une troiſiéme ſont égales entr'elles.

8. La Raiſon de b à d demeure la même, ſi je multiplie chacun de ces termes par c ; car ſi l'Expoſant de b à d eſt g, à la place de d, j'aurai bg, & à la place de dc, j'aurai bgc : or l'Expoſant de b à bg, c'eſt préciſément le même que celui de bc à bcg, ſavoir g : Donc ſi l'on multiplie par la même quantité l'Antecedent & le Conſequent d'une Raiſon, l'on aura pour Produit un autre Antecedent & un autre Conſequent, qui auront entr'eux la même Raiſon que l'Antecedent & le Conſequent multipliez. *Si le Multipliant eſt le même, les Produits ſont entr'eux comme les Multipliez.*

9. Si au contraire je diviſe b & d par le même terme c, le Rapport des Expoſans ſera égal à celui de b & d ; ſoit appellé g l'Expoſant de b diviſé

diviſé par c, & m l'Expoſant de d diviſé par c; à la place de b, j'aurai cg, & à la place de d, j'aurai cm: or il eſt viſible que cg eſt à cm, comme g à m par le précedent Article, puiſque g & m ont été multipliez l'un & l'autre par la même Grandeur. Donc *ſi l'on emploïe le même Diviſeur, les Quotiens ſont entr'eux comme les Diviſez.* J'ai 24 & 32, je diviſe chacun par 8, & j'ai 24. 32 :: 3. 4; & ſi je diviſe chacun par 4, j'aurai 24. 32 :: 6. 8. J'ai 36 & 48, je diviſe chacun par 12, j'ai 36. 48 :: 3. 4; je diviſe chacun par 6, & j'ai 36. 48 :: 6. 8. Je diviſe chacun par 24, j'ai 36. 48 :: $\frac{3}{2}$. 2. ou 36. 48 :: $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{2}$. ou 36. 48 :: 3. 4, ainſi que nous l'avons d'abord vû.

10. Si $b. c :: d. f$: $b + d$ ſera à $c + f$, comme b eſt à c. Que l'Expoſant des deux premieres Raiſons ſoit appellé g, l'on aura $b. bg :: d. dg$. & il eſt évident que $b + d. bg + dg :: b. bg$; car dans l'une & dans l'autre Raiſon l'Expoſant eſt g. La Raiſon d'un Antecedent à un Conſequent ne change donc point, ſi ce que l'on ajoûte à l'Antecedent & au Conſequent, eſt comme l'Antecedent au Conſequent. 3. 4 :: 6. 8. D. 9. 12 :: 3. 4. car l'Expoſant de 9 à 12, c'eſt $\frac{3}{4}$, puiſque 9 contient 3 fois le quart de 12.

Si $b. c. :: d. f :: g. h :: i. k$. on aura $b. c :: b + d + g + i. c + f + h + k$. Car déja $b. c :: d. f$. Donc $b. c :: b + d. c + f$. Or $b. c :: d. f$. Donc $b + d. c + f :: d. f$.

Or $d. f :: g. h$. Donc $b + d. c + f :: g. h$. Donc $b + d + g. c + f + h :: g. h$.

Or $g. h :: d. f.$ & $d. f :: b. c.$ D. $g. h :: b. c.$ Donc $b + d + g. c + f + h :: b. c.$

11. *Cette raiſon non plus ne changera point par des Souſtractions, ſi ce que l'on ôte de l'Antecedent, eſt à ce que l'on ôte du Conſequent, comme l'Antecedent au Conſequent.* Si $b. c :: d. f$, $b - d$ ſera à $c - f$, comme b à c; que l'on appelle encore g l'Expoſant des deux premieres Raiſons, c ſera $= bg$ & $f = dg$: or il eſt évident que $b - d. bg - dg :: b. bg$, puiſque dans l'une & l'autre Raiſon l'Expoſant eſt $g. 15. 12 :: 5. 4$. Donc $10. 8 :: 15. 12$; car l'Expoſant de 15 à 12, c'eſt $\frac{5}{4}$, & l'Expoſant de 10 à 8 eſt auſſi $\frac{5}{4}$; chacun de ces Antecedens contient 5 fois le quart de ſon Conſequent.

12. Lorſque 4 Grandeurs ſont en proportion, le Produit des extrêmes eſt égal au Produit des moïens, ſi $b. c :: d. f$: bf ſera $= cd$. Car ſi l'on appelle l'Expoſant de ces Raiſons g, à la place de c, on aura bg, & à la place de f, on aura dg; & en ce cas, il eſt manifeſte que bdg eſt tout enſemble le Produit des extrêmes b & dg, & des moïens bg & d.

Remarque. Comme l'on fait apprendre l'Arithmetique avant l'Algebre, parce qu'en effet elle a été en uſage avant l'Algebre, on ſe trouve obligé, d'apprendre pluſieurs Regles par routine, & ſans en comprendre la raiſon, ou de les demontrer par des détours peu naturels, comme font ceux qui tirent leurs Demonſtrations de la Geometrie; ou du moins l'on eſt réduit à des Demonſtrations beaucoup plus longues que celles qui naîtroient de l'Algebre, dont les expreſſions generales doivent naturellement conduire à celles de l'Arithmetique

Digitized by Google

ordinaire qui ſont plus déterminées.

Il n'y a perſonne qui ne convienne d'abord que 2 fois 3 & 3 fois 2 aboutiſſent au même Produit 6; mais j'ai vû des Gens qui étoient embaraſſez, lorſque cette alternative tomboit ſur de plus grands nombres, & doutoient, par exemple, ſi 12 fois 7, ou 7 fois 12 étoient la même choſe. Et il eſt certain que la plûpart des Gens en tombent d'accord, ſans pouvoir en alleguer aucune raiſon. J'ai demontré cette Propoſition dans mon Arithmetique, mais ce Theorême en fournit une preuve très-ſimple & très-nette. Je dis donc que c'eſt tout un de multiplier b par c, ou c par b, & que l'on aura toûjours le même Produit. Quand c eſt le Multiplié, il faut établir cette Proportion 1. b : : c. au Produit, lequel j'appellerai p; & ſi b eſt le Multiplié, il faudra établir cette Proportion 1. c : : b. au Produit que j'appellerai z; j'ai donc ces deux Proportions: la premiere 1. b : : c. p, la ſeconde 1. c : : b. z. Dans la premiere $bc = 1p$, & dans la ſeconde $cb = 1z$. Donc $p = z$; & par conſequent, ſoit que l'on multiplie b par c, ou c par b, on aura toûjours le même Produit. La Regle de Trois ſe demontre tout naturellement par le même principe; j'ai 3 termes b, c, d, je cherche un 4e z, tel que je puiſſe dire b. c : : d. z; pour cet effet il faudra que $bz = cd$; c'eſt-à-dire, le Produit des moïens eſt donc compoſé de deux Racines, deſquelles l'une eſt b; par conſequent ſi je le diviſe par cette Racine b, j'aurai l'autre z, & cd diviſé par b, me donnera pour Quotient le 4e nombre que je cherche.

13. Dans une Proportion continuë le Quarré du terme moïen eſt égal au Produit des extrêmes, parce que ce moïen ſe repete deux fois pour faire

chaque fois un des termes moïens ∴ *b. c. d.* s'exprime ſi l'on veut ainſi *b. c* : : *c. d.* Donc *b d* = *c c.*

14. Lorſque le Produit des extrêmes eſt égal au Produit des moïens, les Grandeurs ſont en proportion, pourvû que les deux Racines d'un des Produits ſoient extrêmes, & les deux Racines de l'autre ſoient moïennes. Si *b f* = *c d*, je dis que *b. c* : : *d. f.* Pour le prouver, multiplions *d.* & *f* chacun par *b*, nous aurons *b d. b f* : : *d. f*, par l'Article 8e : multiplions encore *b* & *c* chacun par *d*, nous aurons *b d. c d* : : *b. c.* Ainſi *b d. b f* : : *d. f.* & *b d. c d* : : *b. c.* Or à la place de *c d*, mettons *b f*, qui lui eſt égal, nous aurons *b d. b f* : : *b. c.* Or *b d. b f* : : *d. f.* Donc *d. f* : : *b. c.* De la ſuppoſition que *b f* = *c d*, je veux conclure *b. c* : : *d. f.* A la place de *b f*, mettez *c d*, ſon égale, vous aurez *d. f* : : *b d. c d*; or *b d. c d* : : *b. c.* D. *b. c.* : : *d. f.*

15. *b f* = *c d.* 1°. *b. c* : : *d. f.* 2°. *b. d* : : *c. f.* 3°. *c. b* : : *f. d.* 4°. *c. f* : : *b. d.* Pour établir chacune de ces Concluſions, il n'y a qu'à multiplier les deux termes de la ſeconde Comparaiſon par l'Antecedent de la premiere, après quoi il faut ſubſtituer à l'un des Produits ſon égal. La ſuppoſition eſt *b f* = *c d*; pour demontrer la Concluſion *c. f* : : *b.* [illegible], je multiplie les deux termes *b* & *d* par l'Antecedent *c*, & j'ai *b. d* : : *b c. d c*, à la place de *d c*, je mets *b f*, & j'ai *b. d* : : *b c. b f.*

D'où je conclus *b. d* : : *c. f.* 24 eſt un Produit de 3 par 8, & de 4 par 6. De ſorte que la marque × deſignant Multiplication 24 = 3 × 8 & 4 × 6 = 3 × 8. Je conclus de là 1°. 3. 6 : : 4. 8. 2°. 3. 4 : : 6. 8 3°. 6. 8 : : 3. 4. 4°. 4. 8 : : 3. 6. 5°. 8. 6 : : 4. 3. 6°. 8. 4 : : 6. 3. 7°. 6. 3 : : 8. 4. 8°. 4. 3 : : 8. 6. Car en faiſant de 3

Digitized by Google

& de 8 les extrêmes, je puis établir quatre Proportions, puiſque je peux commencer par 3, & je puis commencer par 8, en voila déja 2, & chacune de ces 2 ſe ſubdiviſera en 2 autres; puiſque quand je commence par 3, je puis prendre 6 ou 4 pour ſecond terme; & quand je commence par 8, je puis de même faire 2 alternatives. Si je fais de 4 & 6 les extrêmes, j'aurai de même 4 Proportions.

16. *b. c* : : *d. f.* D. *c. b* : : *f. d*, cela s'appelle *Invertendo*; car ſi *b* contient *c*, comme *d* contient *f*; *c* eſt contenu par *b*, comme *f* eſt contenu par *d*. 4. 12 : : 5. 15. D. 12. 4 : : 15. 5; car ſi 4 eſt contenu en 12, comme 5 en 15, il s'enſuit que 12 contient 4, comme 15 contient 5.

17. *b. c* : : *d. f.* Donc *Alternando b. d* : : *c. f.* *Demonſtration.* Soit l'Expoſant des deux premieres Raiſons *g*, l'on aura *b. bg* : : *d. dg* d'où je conclus que *b. d* : : *bg. dg* par l'Article 8e.

8. 12 : : 10. 15. D. 8. 10 : : 12. 15. l'Expoſant de 8 à 12, c'eſt $\frac{3}{2}$; ainſi je puis dire 8. $\frac{3}{2}$ 8 : : 10. $\frac{3}{2}$ 10. Donc 8. 10 : : $\frac{3}{2}$ 8. $\frac{3}{2}$ 10; car je multiplie 8 & 10 chacun par $\frac{3}{2}$.

Dans tous les Exemples nous avons ſuppoſé le Conſequent plus grand que l'Antecedent, mais ſi l'Antecedent étoit plus grand que le Conſequent, pour former les mêmes Demonſtrations il n'y auroit qu'à mettre à la place de l'Antecedent le Conſequent multiplié par l'Expoſant. Que *c. b* : : *f. d*, & que dans cette Proportion les Antecedens ſurpaſſent les Conſequens; ſi nous appellons *g* l'Expoſant de ces deux Raiſons, au lieu de *c. b* : : *f. d.*

nous aurons $bg.\ b::dg.\ d.$ 12. 8 :: 15. 10, s'exprime encore en diviſant $\frac{3}{2}$ 8. 8 :: $\frac{3}{2}$ 10. 10.

18. $b.\ c::d.\ f.$ D. *Componendo.* $b+c.\ c::d+f.\ f.$ *Demonſtration.* $b.\ c::d.\ f.$ D. *Alternando* $b.\ d::c.\ f.$ D. par l'Article 10^e $b+c.\ d+f::b.\ d$, or $b.\ d::c\ f.$ D. $b+c.\ d+f::c.\ f.$ D. *Alternando* $b+c.\ c::d+f.\ f.$

3. 8 :: 6. 16 ; je veux prouver que $3+8=11.\ 8::6+16=22.\ 16.$ 3. 8 :: 6. 16. D. *Alternando* 3. 6 :: 8. 16. D. par l'Article 10^e $3+8.\ 6+16::3.\ 6.$ Or 3. 6 :: 8. 16. D. $3+8.\ 6+16::8.\ 16$, & *Alternando* $3+8=11.\ 8::6+16=22.\ 16.$

19. $b.\ c::d.\ f.$ Donc *Dividendo* $b-c.\ c::d-f.\ f.$ *Demonſtration.* $b.\ c::d.\ f.$ D. *Alternando* $b.\ d::c.\ f$, par l'Article 11^e $b-c.\ d-f::c.\ f$, & *Alternando* $b-c.\ c::d-f.\ f.$

24. 20 :: 18. 15 ; je veux prouver que $24-20=4.\ 20::18-15=3.\ 15.$ 24. 20 :: 18. 15 *Alternando* 24. 18 :: 20. 15. Donc par l'Article 11^e $24-20.\ 18-15::24.\ 18.$ Or $24.18::20.\ 15.$ D. $24-20.18-15::20.15$, & *Alternando* $24-20=4.\ 20::18-15=3.\ 15.$

20. $b.\ c::d.\ f.$ Donc *Convertendo* $b-c.\ b::d-f.\ d.$ *Demonſtration.* $b.\ c::d.\ f.$ D. *Alternando* $b.\ d::c.\ f.$ D. $b-c.\ d-f::b.\ d.$ D. *Alternando* $b-c.\ b::d-f.\ d.$ On prouvera de la même maniere que ſi $b.\ c::d.\ f.\ b+c.\ b::d+f.\ d.$

8. 5 :: 24. 15. Pour prouver que $8-5=3.\ 8::24-15=9.\ 24$, j'argumente ainſi 8. 5 :: 24. 15. D. *Alternando* 8. 24 :: 5. 15. D. par l'Art.

Digitized by Google

11e 8 — 5. 24 — 15 :: 8. 24. Donc *Alternando* 8 — 5 = 3. 8 :: 24 — 15 = 9. 24.

De même si 3. 7 :: 12. 28. Pour prouver que 3 + 7 = 10. 3 :: 12 + 28 = 40. 12, je dis 3. 7 :: 12. 28. D. *Alternando* 3. 12 :: 7. 28. D. par l'Art. 10e 3 + 7. 12 + 28 :: 3. 12. D. *Alternando* 3 + 7 = 10. 3 :: 12 + 28. = 40. 12.

Raiſon d'Egalité par Ordre.

21. On place 1°. de ſuite les Grandeurs *b*, *c*, *d*, 2°. on place ſous elles les Grandeurs *e*, *f*, *g*; en ſorte que *e* ſoit ſous *b*, *f* ſous *c*, & *g* ſous *d*. 3°. L'on ſuppoſe que *b*. *c* :: *e*. *f*, & que *c*. *d* :: *f*. *g*, & de là l'on conclud que *b*. *d* :: *e*. *g*. *b*, *c*, *d*. *e*, *f*, *g*.

Demonſtration. *b*. *c* :: *e*. *f*. ſoit appellé leur Expoſant *m*. D. *c* = *bm*, *f* = *em*, je puis donc mettre *b*. *bm* :: *e*. *em*; de même puiſque *c*. *d* :: *f*. *g*. l'on peut dire *bm*. *d* :: *em*. *g*. Que l'Expoſant de cette derniere Proportion ſoit appellé *z*, à la place de *d*, nous aurons *bmz*, & à la place de *g*, nous aurons *emz*, de ſorte que *bm*. *bmz* :: *em*. *emz*: il falloit prouver que *b*. *d* :: *e*. *g*. Or cela eſt évident, puiſque *b*. *bmz* :: *e*. *emz*; car par l'Article 11e *b* & *e* aïant été multipliez chacun par *mz*, la Raiſon n'eſt point changée: *b* eſt à *c*, comme *b* multiplié par *mz* eſt à *e* multiplié par la même Grandeur *mz*.

Je place dans la premiere ligne 4. 8. 12
& dans la ſeconde 3. 6. 9
je ſuppoſe que 1°. 4. 8 :: 3. 6. 2°. 8. 12 :: 6. 9, & je conclus que 4. 12 :: 3. 9; car 1°. 4. 4 × 2 :: 3. 3 × 2, & pour la ſeconde Proportion 4 × 2. 4 × 3 :: 3 × 2. 3 × 3; ainſi j'ai

4. 4 × 2. 4 × 3
3. 3 × 2. 3 × 3

& dès que j'ai ainſi exprimé

mes termes, il eſt évident que 4 eſt à 3 fois 4 : : 3 eſt à 3 fois 3.

Si l'on a un grand nombre de Quantitez $\left\{\begin{matrix} a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f \\ g.\ h.\ i.\ k.\ l.\ m \end{matrix}\right.$ & que 1°. $a.\ b :: g.\ h.$ 2°. $b.\ c :: h.\ i.$ 3°. $c.\ d :: i.\ k.$ 4°. $d.\ e :: k.\ l$, &c. Il ſuit que $a.\ g :: d.\ k :: f.\ m$, &c.

Demonſtration. $a.\ b :: g.\ h.$ Donc *Alternando* $a.\ g :: b.\ h.$ Or $b.\ c :: h.\ i.$ Donc $b.\ h :: c.\ i.$ Donc $c.\ i :: a.\ g.$ On raiſonnera de même ſur les autres.

Raiſon d'Egalité Troublée.

22. L'on range 1°. 3 Grandeurs ſous 3 Grandeurs, mais la premiere b eſt à la ſeconde c, comme la 5e f à la 6e g, & la ſeconde c eſt à la 3e d, comme la 4e e à la 5e f, il faut conclure que $b.\ d :: e.\ g.$

b. c. d
e. f. g

Demonſtration. Puiſque $b.\ c :: f.\ g.$ Si nous appellons l'Expoſant de ces Raiſons m, à la place de c, nous aurons bm, & à la place de g, nous aurons fm. Puis donc que $c.\ d :: e.\ f$, appellons l'Expoſant de ces deux dernieres Raiſons z, nous aurons $bm.\ bmz :: e.\ ez$, il falloit prouver que $b.\ d :: e.\ g$; c'eſt-à-dire que $b.\ bmz :: e.\ fm.$ & puiſque $f = ez$, il ſuit que $b.\ bmz :: e.\ fm$; c'eſt-à-dire que $b.\ bmz :: e.\ emz$; ce qui eſt manifeſte, puiſque dans l'une & dans l'autre de ces Raiſons l'Expoſant eſt mz.

Je place dans la premiere ligne 2. 6. 12
& dans la ſeconde 5. 10. 30
en ſorte que 2. 6 : : 10. 30. & 6. 12 : : 5. 10 : je conclus que 2. 12 : : 5. 30, & pour le demontrer j'écris 2. 2×3 : : 10. 10×3. & 6. 6×2

Digitized by Google

:: 5. 5 × 2, j'aurai donc $\begin{matrix} 2. & 2\times3. & 2\times3\times2 \\ 5. & 5\times2. & 5\times2\times3 \end{matrix}$

& après avoir ainſi exprimé mes Grandeurs, il eſt évident que 2. 2 × 3 × 2 :: 5. 5 × 2 × 3.

Proportion reciproque.

Quand le premier terme eſt grand en comparaiſon du ſecond, ou le contient, comme le 4e contient le 3e, on dit que ces quatre termes ſont en *Proportion Reciproque.*

C'eſt une tranſpoſition de la Proportion Directe.

Se change en Directe.

Quand je dis *c. b* : : *d. f*, c'eſt une Proportion Directe. Mais ſi ſans changer la valeur de ces Lettres, je dis *c. b* : : *f. d*, la Proportion eſt reciproque.

Pour la rendre Directe, il faut faire un renverſement dans l'un des Rapports, & écrire *c. b* : : *d. f*, ou *b. c* : : *f. d.*

Dans ces deux cas où la Proportion eſt devenuë Directe $cf = bd$. Donc dans l'Inverſe, où la Reciproque, le Produit du premier Terme par le 3e, eſt égal au Produit du ſecond par le 4e.

Diverſes manieres d'exprimer les Proportions.

Quand je dis *b. c* : : *f. g. c. d* : : *e. f.* Donc *b. d* : : *e. g.* J'exprime une verité d'une maniere enveloppée.

Mais en développant les parties des Quantitez exprimées dans ce Raiſonnement, je parviens à cette Concluſion.

Que la premiere eſt à la premiere multipliée par une certaine Quantité, comme la quatriéme à la quatriéme multipliée par la même Quantité.

Les expreſſions Algebriques dans leſquelles je me ſuis énoncé ſont plus courtes, mais elles ne ſont pas préciſes ou moins degagées de tout équivoque.

Une des meilleures manieres de raiſonner des plus ſimples & des plus naturelles, c'eſt de mettre à la place de chaque terme ſa définition; & c'eſt juſtement ce qu'on fait lorſqu'on ſubſtituë au

Digitized by Google

ſecond terme d'un Rapport, le premier multiplié par l'Expoſant de ce Rapport. C'eſt là expoſer le Rapport développé, & tout tel que ſa définition le preſente.

Raiſon plus grande. Lorſque b eſt trop grand pour que l'on puiſſe dire qu'il contient c, de la même maniere que d contient f. On dit que la *Raiſon* de b à c eſt plus grande que celle de d à f; c'eſt-à-dire que b contient c plus que d ne contient f, ou une certaine portion de c plus que d ne contient une ſemblable portion de f.

Plus au lieu d'écrire $b.\ c :: d.\ f$, on écrit $\frac{b}{c} \rhd \frac{d}{f}$.

Raiſon plus petite. C'eſt tout le contraire quand b eſt plus petit qu'il ne faudroit, pour dire que $b.\ c :: d.f$, on dit qu'il a un *moindre Rapport*; ce qui ſe marque ainſi $\frac{b}{c} \lhd \frac{d}{f}$.

La pointe de l'Angle eſt tournée du côté du plus petit Rapport.

Suite de ces Raiſons. Si $\frac{b}{c} \rhd \frac{d}{f}$ le Produit bf des extrêmes eſt plus grand que le Produit cd des moïens, & au lieu de dire $bf = dc$, on dit $bf \rhd dc$.

Demonſtration. Pour avoir $f.\ d :: c.$ à un 4e, il faut que ce 4e ſoit plus petit que b. Appellons-le $b - g$: on aura $b - g.\ c :: d.\ f$. Donc $bf - gf = cd$. Or $bf \rhd bf - gf$. Donc $bf \rhd cd$.

Les Théorêmes peuvent ſe multiplier preſque à l'infini, mais je me ſuis appliqué à établir des Principes qui rendront faciles à trouver les ſuites des conſequences qui en naiſſent.

Digitized by Google

CHAPITRE XII.

Des Progreſſions Geometriques.

1. CHez Euclide & les Anciens Grecs le mot de *Raiſon* ſignifie toûjours une Raiſon Geometrique.

2. La Progreſſion Arithmetique la plus ſimple commence par zero. Progreſſion Arithmetique.

3. Une Progreſſion Arithmetique qui commence par un nombre peut être conſiderée comme un aſſemblage de deux ſommes, dont l'une croît ou décroît, en commençant par le zero, & l'autre eſt compoſée de termes tous égaux aux premiers.

4. La Progreſſion Geometrique eſt compoſée de termes, qui ſucceſſivement chacun pour ſe faire un Conſequent, ſont multipliez par l'Expoſant du premier au ſecond. Geometrique.

5. La Progreſſion croîtra ſi cet Expoſant ou ce Multipliant commun eſt au-deſſus de l'unité, & décroîtra s'il eſt au-deſſous.

6. La plus ſimple commence par l'unité.

7. Celle qui commence par un nombre different de l'unité, peut être conſiderée comme reſultant de deux ſommes, dont l'une commence par l'unité, pour croître ou décroître, & l'autre eſt toute compoſée de termes égaux au premier; en telle ſorte que chaque terme de l'une eſt multiplié par celui qui ſe trouve au-deſſous.

8. Quand la Progreſſion Arithmetique ne commence pas par zero, après avoir fait la ſomme de deux Expoſans pour connoître la place du terme que l'on cherche, il faut ôter de cette ſomme le premier Expoſant.

Digitized by Google

9. Quand la Geometrique ne commence pas par un, après avoir multiplié deux termes, pour avoir le troiſiéme que l'on cherche, il faut faire la diviſion du Produit par le premier.

1 2 4 8 16 Progreſſion Geometrique ſimple
2 2 2 2 2
2 4 8 16 32 Progreſſion Geometrique compoſée
1 3 9 27 81 Simple
3 3 3 3 3
3 9 27 81 243 Compoſée
0. 1. 2. 3. 4. 5. Progreſſion Arithmetique ſimple
1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6. Progreſſion Arithmet. compoſée
0 2. 4. 6. 8. 10 Simple. } Dans l'Ar. on ajoûte.
3 3 3 3 3 3 Compoſée. } Dans la Geo. on mult.
3. 5. 7. 9. 11. 13 Compoſée.

Maniere de l'exprimer.

10. On peut utilement donner au ſecond terme d'une Progreſſion le nom du premier terme multiplié par l'Expoſant, & au troiſiéme le nom du ſecond; derechef multiplié par l'Expoſant; c'eſt-à-dire, le nom du premier multiplié par la ſeconde Puiſſance de l'Expoſant; ainſi au lieu de a, b, c, d, ſi l'Expoſant eſt m, j'écrirai $a. am. am^2. am^3$: de maniere que chaque terme eſt un Produit du premier par l'Expoſant, élevé à une Puiſſance auſſi grande qu'il y a de termes précedens.

On ſuivra toûjours la même Méthode, quand même la Progreſſion ira en diminuant; car ſi j'ai, par exemple, $\div$ 48. 36. 27. Si je diviſe 36 par 48, le Quotient ou l'Expoſant ſera $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$.

Digitized by Google

D. $48 \times \frac{3}{4} = 36$, & par la même raiſon $36 \times \frac{3}{4} = 27$. Donc au lieu de $\div\div$ 48. 36. 27, j'aurois $\div\div$ 48. $48 \times \frac{3}{4}$. $48 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$, ou $\div\div$ 48. $48 \times \frac{3}{4}$. $48 \times \frac{9}{16}$.

Si j'avois eu $\div\div$ 27. 36. 48, j'aurois changé 36 en $27 \times \frac{4}{3}$, & 48 en $27 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}$, ce qui m'auroit donné $\div\div$ 27. $27 \times \frac{4}{3}$. $27 \times \frac{16}{9}$.

Fruits & conſequences de ces expreſſions.

11. Dès que l'on aura ainſi exprimé les termes d'une Progreſſion, il ſera facile de ſe convaincre que le Produit du premier & du dernier eſt égal au Produit de deux autres termes, également diſtans, l'un du premier, & l'autre du dernier; car le dernier terme contient le premier multiplié par l'Expoſant de la Progreſſion, élevé à une Puiſſance, de laquelle le nombre indice contient autant d'unitez qu'il y a de termes dans la Progreſſion moins un.

Quand je multiplie ce terme par le premier, puiſqu'il contient déja une fois le premier, le Produit ſera le Quarré du premier, multiplié par l'Expoſant de la Progreſſion, auquel Expoſant on joindra pour indice de ſon élevation un nombre contenant autant d'unitez qu'il y a de termes dans la Progreſſion moins un.

Si je choiſis dans la Progreſſion deux termes dont l'un ſoit loin du premier, comme l'autre l'eſt du dernier, & que je multiplie ces deux termes l'un par l'autre, 1°. comme chacun contient le premier, leur Produit contiendra le Quarré du premier. 2°. Ce Quarré ſera multiplié par l'Expo-

Digitized by Google

ſant de la Progreſſion élevé à un certain degré, 3°. pour avoir le nombre qui marque ce degré il faut ajoûter l'indice de l'un avec l'indice de l'autre (car quand je multiplie $b\,m^5$ par $b\,m^7$, j'ai $bb\,m^{12}$) : or les nombres qui marquent l'élevation de l'Expoſant croiſſans en Progreſſion Arithmetique, la ſomme du premier & du dernier eſt égale à la ſomme de deux, également éloignez du premier & du dernier.

$b\,m^5 = b\,m\,m\,m\,m\,m$, & $b\,m^7 = b\,m\,m\,m\,m\,m\,m\,m$. Donc $b\,m^5 \times b\,m^7 = bb\,m$.

Si b eſt le premier terme, & m l'Expoſant, le Produit contient le Quarré du premier terme multiplié par l'Expoſant élevé à la 12e Puiſſance.

Quand je dis que les nombres qui marquent l'élevation de l'Expoſant croiſſent en Progreſſion Arithmetique, il faut conſiderer le premier terme dans lequel l'Expoſant ne ſe trouve pas comme 0, le ſecond terme eſt 1, le troiſiéme 2, &c. Tellement que s'il y a 13 termes, l'Addition du premier, qui eſt 0, avec le 13e qui eſt 12, égale la ſomme du 6e qui eſt 5, & du 8e qui eſt 7. Si j'ai $\div\div\, b.\ b\,m.\ b\,m^2.\ b\,m^3.\ b\,m^4.\ b\,m^5.\ b\,m^6.\ b\,m^7.\ b\,m^8.\ b\,m^9.\ b\,m.^{10}.\ b\,m^{11}.\ b\,m^{12}$. Si je multiplie le premier & le dernier, j'aurai $bb\,m^{12}$, & ſi je multiplie $b\,m^{10}$ par $b\,m^2$, j'aurai de même $bb\,m^{12}$; il en eſt ainſi de tous les autres que je choiſirai à égale diſtance, l'un du premier & l'autre du dernier.

12. On s'aſſûrera de même que le Quarré d'un terme eſt égal au Produit des deux autres également éloignez de lui, tant du côté du premier, que du côté du dernier. Si je multiplie $b\,m^{12}$ par b, j'aurai $bb\,m^{12}$, & j'aurai le même Produit ſi je quarre $b\,m^6$ également éloigné du premier b & du dernier $b\,m^{12}$.

Digitized by Google

Puiſque l'unité eſt au Multipliant, comme le Multiplié au Produit, quand j'ai 1. b : : b. bb, j'aurai $\div$ 1. b. bb. & la Racine d'un Quarré eſt moïenne proportionnelle entre lui & l'unité.

13. Dans une Progreſſion Geometrique le ſecond terme moins le premier, eſt au premier, comme le dernier — le premier, eſt à la ſomme de tous les précedens. Soit la Progreſſion $\div$ a. b. c. d. e. f. je dis que $b - a$. a : : $f - a$. $a + b + c + d + e$. Théorême fondamental.

Demonſtration. L'on peut ainſi exprimer cette Progreſſion a. b : : b. c : : c. d : : d. e : : e. f. *Invertendo* b. a : : c. b & c. b : : d. c : : e. d : : f. e. Donc b. a : : $b + c + d + e + f$. $a + b + c + d + e$. *Dividendo* $b - a$. a : : $b + c + d + e + f - a - b - c - d - e$. $a + b + c + d + e$, & en corrigeant $b - a$. a : : $f - a$. $a + b + c + d + e$.

14. Si l'Expoſant de la Progreſſion eſt 2, b ſera double de a, & par conſequent $b - a$ ſera $= a$, & le dernier — le premier égalera la ſomme de tout ce qui le precede; car les deux termes de la premiere comparaiſon étant égaux, les deux termes de la ſeconde ſeront auſſi égaux. Si l'Expoſant eſt 3, $b - a$ ſera double de a, & le dernier terme — le premier, ſera double de tous les précedens. Si l'Expoſant eſt 4, le ſecond — le premier ſera triple du premier, & le dernier — le premier, ſera triple de tout ce qui le precede; de ſorte que pour avoir la ſomme de tout ce qui precede le dernier, il faut 1°. ôter le premier du dernier, & diviſer le reſte par un nombre qui ſoit plus petit que l'Expoſant d'une ſeule unité. Si l'Expoſant de la Progreſſion eſt 5, le ſecond terme eſt quintuple du premier, par conſequent le ſecond — le premier, eſt quadruple du premier, & le dernier — le premier, ſera auſſi quadruple

Digitized by Google

de tout ce qui le precede ; de ſorte que pour avoir la ſomme de tout ce qui precede le dernier, il faut diviſer le dernier terme, diminué du premier, par l'Expoſant diminué de l'unité, ici par $5 - 1 = 4$.

Problêmes. 15. *Pour trouver la ſomme de la Progreſſion, quand on a le premier terme, le dernier terme & l'Expoſant*, 1°. du dernier l'on retranche le premier, & l'Expoſant fait connoître combien de fois ce reſte égale la ſomme de tous les termes qui precedent le dernier. On diviſe donc 2°. ce reſte par l'Expoſant diminué de l'unité, & le Quotient donne la ſomme de tout ce qui precede le dernier, 3°. ſi l'on ajoûte cette ſomme au dernier, l'on aura la ſomme totale. Que le premier terme ſoit 3, le dernier 1875, l'Expoſant 5. 1°. Je ſai que $1875 - 3 = 1872$ eſt quadruple de tout ce qui le precede. Donc en diviſant 1872 par 4, j'ai la ſomme de tous les termes qui precedent le dernier. Si donc je joins à 468, ſomme de tout ce qui precede le dernier terme, 1875 dernier terme, l'on aura 2343 la ſomme de tous les termes.

16. *Pour trouver la ſomme, quand on a le premier, le dernier & le nombre des termes*, il faut 1°. diviſer le dernier par le premier, & le Quotient contiendra l'Expoſant élevé à une certaine Puiſſance, laquelle ſera exprimée, ſuivant l'Article dixiéme, par le nombre des termes, diminué de l'unité ; il faudra donc 2°. chercher un nombre, qui, élevé à une certaine Puiſſance, forme le Quotient trouvé, ce ſera l'Expoſant ; & quand on a l'Expoſant, avec le premier & le dernier terme, l'on trouvera la ſomme par l'Article precedent.

3 eſt premier terme, 1875 dernier terme, la Progreſſion eſt de 5 termes, il en faut connoître la ſomme. 1°. Puiſque le dernier terme eſt le

Produit

Produit du premier par l'Expoſant élevé à une certaine Puiſſance, ſi je diviſe 1875 par 3, le Quotient 625 contient une Puiſſance de l'Expoſant de la Progreſſion. Puiſqu'il y a 5 termes, l'expoſant eſt élevé dans le dernier à la 4ᵉ Puiſſance. Donc 625 eſt une 4ᵉ Puiſſance, il en faut tirer la Racine Quarrée, & l'on aura l'expoſant. Par le moïen de cet expoſant, & du Problême precedent, l'on aura la ſomme que l'on cherche.

Si l'on ſe trouve embaraſſé à trouver la Racine d'une Puiſſance 11ᵉ par exemple ou 17ᵉ, il faut prendre quelque nombre, comme par exemple 4, & l'élever par degrez juſques à cette Puiſſance: ſi 4 ainſi élevé égale le Quotient du dernier terme diviſé par le premier, c'eſt une preuve que 4 eſt l'expoſant; mais ſi la 17ᵉ Puiſſance de 4 eſt plus petite que ce Quotient, il faut tâcher d'élever 5 à cette Puiſſance: ſi au contraire la 17ᵉ Puiſſance eſt plus grande que ce Quotient, il faut eſſaïer d'élever 3.

Pour faciliter cette élevation, il faut ſe ſouvenir de la formation des Puiſſances, qui nous apprendra, qu'en multipliant une Puiſſance par une autre, l'on a pour Produit une Puiſſance, dont l'expoſant eſt la ſomme des deux Expoſans, dont on a multiplié les Puiſſances. Si je multiplie le Quarré par le Cube, j'aurai la 5ᵉ Puiſſance; ſi je multiplie la 8ᵉ Puiſſance par elle-même, j'aurai la 16ᵉ, & en multipliant cette 16ᵉ par ſa Racine, j'aurai la 17ᵉ; en multipliant la 5ᵉ par elle-même, j'ai la 10ᵉ: en multipliant la 10ᵉ par elle même, la 20ᵉ, & en multipliant la 20ᵉ par le Cube, j'ai la 23ᵉ.

17. *Pour trouver la ſomme, quand on a le premier terme, l'expoſant & le nombre des termes,*

1°. le nombre des termes manifeſte à quelle Puiſſance il faut élever l'expoſant, 2°. l'on multipliera l'expoſant ainſi élevé par le premier terme, ce qui donnera le dernier, & fera découvrir la ſomme par l'Article 15e. Le premier terme eſt 3, l'expoſant 5, & le nombre 6; je ſai que le dernier terme ſera le Produit du premier terme 3, par la 5e Puiſſance de l'expoſant 5, puiſqu'il y a 5 termes avant le dernier. J'éleve donc 5 à la 5e Puiſſance, & j'ai 3125; je multiplie cette 5e Puiſſance de mon expoſant par 3 premier terme, & le Produit 9375 me donne le dernier terme, & quand j'ai ce terme, je trouverai la ſomme par l'Article quinziéme.

18. *Pour trouver la ſomme, quand on a le dernier, l'expoſant & le nombre des termes*, 1°. il faut diminuer de l'unité ce nombre des termes, & élever l'expoſant à une Puiſſance, dont le degré reponde à ce nombre ainſi diminué, 2°. par une telle Puiſſance l'on diviſera le dernier terme & le Quotient ſuivant l'Article dixiéme, donnera le premier terme, qui ſervira à découvrir la ſomme par l'Article 16e. L'expoſant eſt 5, le nombre des termes 9, & le dernier terme 1171875. 1°. Puiſqu'il y a 9 termes, l'expoſant 5 eſt parvenu dans le dernier terme à la 8e Puiſſance, donc le dernier terme eſt le Produit de 390625 8e Puiſſance de 5 par le premier terme: donc en diviſant 1171875 dernier terme par 390625 8e Puiſſance de l'expoſant 5, 3 le Quotient de cette Diviſion ſera le premier terme, & quand on a le premier, le dernier & l'expoſant, l'on connoît la ſomme par l'Article 15e.

19. *Pour trouver le dernier terme, quand on a le premier, l'expoſant & le nombre des termes*,

Digitized by Google

il faut operer ſelon l'Article 17e. Le premier terme eſt 2, l'expoſant 3, le nombre des termes 8, 1°. j'éleve l'expoſant 3 à la 7e Puiſſance en multipliant 81 ſa 4e Puiſſance par 27 ſa 3e; le Produit 2187 je le multiplie par 2 premier terme, & j'ai 4374 pour dernier terme.

20. *Mon premier terme eſt 5, l'expoſant eſt 3, la ſomme* 16400, *pour trouver le dernier terme*, je raiſonne ainſi afin de donner dans cet Exemple, une Méthode generale : La ſomme 16400 eſt compoſée du premier terme, du dernier terme — le premier, & de tout ce qui precede le dernier terme. J'ôte de ces trois parties le premier terme, & il me reſte 16395 ſomme du dernier terme — le premier, & de tout ce qui precede le dernier; ſi je puis dégager l'une de ces deux portions d'avec l'autre, j'aurai le dernier terme. Pour en venir à bout, il eſt neceſſaire que je connoiſſe la Raiſon de ces deux parties, or l'expoſant me la manifeſte, & ici puiſque l'expoſant eſt 3, je ſai que le dernier terme — le premier; eſt double de tout ce qui precede le dernier; il faut donc diviſer 16395 en deux parties, dont l'une ſoit double de l'autre; c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre le tiers de 16395 pour une partie, & le double de ce tiers pour l'autre. J'aurai donc 5465 pour ce qui precede le dernier terme, & j'aurai 10930 pour la ſomme du dernier — le premier, à laquelle ajoûtant 5, j'ai 10935 pour dernier terme, auquel joignant 5465, ſomme de tout ce qui precede, j'ai derechef ma ſomme totale 16400, & cela prouve la juſteſſe de l'operation.

21. *Quand on a le premier terme, le nombre & la ſomme des termes, pour trouver le dernier*, il faut 1°. ſuppoſer un expoſant, 2°. l'élever à la

Puiſſance qu'exige le nombre des termes; 3°. multiplier cette Puiſſance par le premier. Si l'on a ſuppoſé juſte ce Produit donnera le dernier terme que l'on cherche ; & pour s'en aſſurer, on l'ôtera de la ſomme, & l'on verra ſi le reſte a, avec ce dernier terme qu'on a trouvé, la proportion qu'indique l'expoſant ſuppoſé. Le premier terme eſt 5, le nombre des termes 8, la ſomme 16400. On ſouhaite le dernier terme, 1°. je ſuppoſe que 2 eſt l'expoſant ; & puiſque la Progreſſion renferme 8 termes, je l'éleve à la 7e Puiſſance 128, 2°. cette 7e Puiſſance de l'expoſant, je la multiplie par le premier terme, & j'ai 640, qui ſeroit le dernier terme dans la ſuppoſition de cet expoſant, 3°. dans la même ſuppoſition 640—5 (premier terme) ou 635, eſt la ſomme de tout ce qui precede le dernier, la ſomme totale ſera donc 640 + 635 = 1275 ; cette ſomme n'eſt pas la même que la propoſée 16400 : je ſuppoſe donc un ſecond expoſant plus grand d'une unité, & après avoir fait les mêmes operations, comme je rencontre ma ſomme propoſée, je concluds que j'ai bien ſuppoſé.

22. *L'expoſant eſt* 3, *le nombre des termes* 8, *& la ſomme* 16400. *Pour découvrir le premier terme*, 1°. je ſuppoſe 1 pour premier terme, & dans cette ſuppoſition je trouve par l'Article 19e 2187 pour dernier terme. 2°. Donc 2187 — 1 = 2186 eſt double de tout de tout ce qui precede le dernier terme. 3°. Je joins donc 1093, moitié de 2186 avec le dernier terme 2187, & j'ai pour ſomme totale de la Progreſſion 3280. 4°. J'établis la Regle de Trois, & je dis la ſomme 3280 ſuppoſe un pour premier terme, la ſomme 16400 quel terme demandera-t-elle pour le premier ? Car

Digitized by Google

l'expoſant étant 3 dans l'une & l'autre Progreſſion, la même proportion qui regne entre les 8 termes de l'une, regne auſſi entre les 8 termes de l'autre, je trouve donc 5 pour premier terme, & par l'Article 19e je découvre le dernier 3280. 16400 :: 1. 5.

23. *Quand on a le dernier terme, l'expoſant, le nombre des termes, pour trouver le premier*, il faut élever l'expoſant à la Puiſſance qu'exige le nombre des termes, & diviſer le dernier terme par cette Puiſſance, le Quotient donnera le premier terme; le dernier terme eſt 5184, l'expoſant eſt 6, & il y a 5 termes, 1°. l'expoſant ſera élevé dans le 5e terme à la 4e Puiſſance; le dernier eſt donc un Produit de 1286 4e Puiſſance de 6, multipliée par le premier terme, ſi donc je diviſe 5184 dernier terme par l'une de ſes Racines 1286, le Quotient 4 me donnera l'autre Racine qui ſera le premier terme.

24. *Si on a le dernier terme, l'expoſant & la ſomme des termes, pour trouver le premier*, il faut 1°. ôter le dernier de la ſomme, ce qui reſte eſt égal à la ſomme de tous les termes precedens. 2°. Il faut multiplier ce reſte ou cette ſomme des precedens par l'expoſant diminué de l'unité. 3°. Il faut ôter ce Produit du dernier terme, & le reſidu ſera le premier que l'on cherche. Le dernier terme eſt 5184, l'expoſant eſt 6, la ſomme de toute la Progreſſion eſt 6220. 1°. Si de cette ſomme j'ôte le dernier, le reſte 1036 contiendra la ſomme de tout ce qui precede le dernier. 2°. Puiſque l'expoſant eſt 6, le dernier — le premier eſt quintuple de tout ce qui le precede. Donc 3°. 5 fois 1036 = 5180 égale au dernier terme 5184 diminué du premier terme; ſi donc j'ôte 5180 de

Digitized by Google

5184, le reſidu 4 indiquera le premier terme.

25. *Quand on a le dernier, le nombre & la ſomme de tous les termes, pour trouver le premier*, il faut 1°. ôter le dernier terme de la ſomme, 2°. par le reſte de cette Souſtraction qui ſera la ſomme des precedens, on diviſera la ſomme de tous les termes; &, quand on aura fait cette Diviſion, l'on aura l'expoſant de la Progreſſion, & ce qui reſtera ſera le premier terme. Le dernier terme eſt 5184, le nombre des termes 5, & la ſomme de tous les termes 6220. 1°. J'ôte le dernier terme de la ſomme, & le reſte 1036 contient la ſomme de tout ce qui precede le dernier. 2°. Je diviſe 6220 par 1036 : le Quotient eſt 6 & le reſidu 4. 3°. Cela m'apprend que la ſomme de la Progreſſion contient 6 fois tout ce qui precede le dernier terme, & outre cela 4. Or la ſomme de la Progreſſion contient le dernier terme, & tout ce qui precede le dernier; ces deux parties ſont égales à 6 fois 1036 + à 4. Il s'enſuit qu'elle eſt compoſée 1°. de 1036, 2°. de 5 fois 1036, & outre cela de 4. Si donc de cette ſeconde partie j'ôte 4, reſtera le quintuple de tout ce qui precede; 4 ſera le premier terme, & le dernier — le premier 4 ſe trouvant quintuple de tout ce qui le precede, l'expoſant de la Progreſſion ſera 6.

L'on pourroit auſſi diviſer le dernier par ce qui precede; ſavoir 5184 par 1036, le Quotient 5 (qui étant augmenté de l'unité, donne l'expoſant de la Progreſſion) apprend que le dernier terme contient 5 fois ce qui le precede; & le reſidu 4 marque le premier terme, puiſque le dernier — 4 contient juſtement 5 fois ce qui le precede.

26. *Quand on a le premier, le dernier & le nombre des termes, pour trouver l'expoſant*, il faut

Digitized by Google

1°. diviſer le dernier par le premier, le Quotient donnera l'expoſant de la Progreſſion élevé à la Puiſſance qu'exige le nombre des termes, & pour avoir l'expoſant il n'y aura qu'à chercher la Racine de cette Puiſſance. Le premier terme eſt 7, le nombre des termes 9, & le dernier terme 45927. 1°. Je diviſe ce dernier terme par le premier 7, j'ai pour Quotient 6561. 2°. Ce Quotient contient l'expoſant élevé à la 8e Puiſſance, puiſqu'il y a 9 termes, je cherche donc un nombre qui élevé à la 8e Puiſſance égale 6561.

27. *Quand on a le premier, le dernier & la ſomme, pour trouver l'expoſant*, il faut 1°. ôter le dernier de la ſomme, le reſidu donnera la ſomme des termes precedens, 2°. par ce reſidu il faut diviſer le dernier terme diminué du premier, & le Quotient de cette Diviſion augmenté de l'unité, donnera l'expoſant que l'on cherche. Le premier eſt 7, le dernier 45927, la ſomme 68887, 1°. de cette ſomme j'ôte le dernier terme, & le reſidu 22960 eſt la ſomme de tout ce qui precede le dernier, 2°. par cette ſomme je diviſe le dernier terme diminué du premier; c'eſt-à-dire, ici 45927 — 7 = 45920, 3°. le Quotient 2 m'apprend que le dernier — le premier eſt double de tout ce qui precede le dernier; or c'eſt ce qui arrive quand l'expoſant eſt 3.

28. *Si l'on a le premier terme, le nombre & la ſomme, pour trouver l'expoſant*, il faut d'abord en ſuppoſer un, puis chercher le dernier terme par l'Article 21e, & continuer à s'aſſurer ſi l'on a bien ſuppoſé. Le premier terme eſt 7, le nombre des termes 9, & la ſomme 68887. 1°. Je ſuppoſe 2 pour expoſant, & puiſqu'il y a 9 termes, je l'éleve à la 8e Puiſſance, 2°. je multiplie 256 8e Puiſ-

Digitized by Google

ſance de 2 par 7 premier terme, & le Produit 1792 contiendroit le dernier terme dans la ſuppoſition de cet expoſant, 3°. le dernier 1792—7 (le premier) = 1785 égaleroit la ſomme de tout ce qui precede le dernier ; de ſorte que 3577 ſeroit la ſomme de la Progreſſion : comme elle eſt differente de la Propoſée 68887, je ſuppoſe un autre expoſant, & de 2 je monte à 3 : or dans cette ſeconde ſuppoſition, en réïterant les Operations precedentes, j'arrive à la ſomme propoſée, ce qui m'apprend que je n'ai pas ſuppoſé faux ; car la 8e Puiſſance de 3 eſt 6561, qui multipliée par le premier terme 7, donne pour dernier terme 45927. Ce dernier terme moins le premier doit dans cette ſuppoſition être double de tout ce qui precede le dernier : donc 22960 eſt la ſomme de tout ce qui precede le dernier, & ſi à cette ſomme l'on joint le dernier, l'on aura pour ſomme totale 68887.

29. *Quand on a le dernier, le nombre & la ſomme des termes, pour avoir l'expoſant*, il faut 1°. ôter le dernier de la ſomme, 2°. diviſer par le reſtant le dernier terme, & 3°. le reſtant de cette Diviſion contiendra le premier terme, & ſon Quotient augmenté de l'unité donnera l'expoſant de la Progreſſion. L'Article 25e en contient un Exemple & la Demonſtration.

30. *Pour trouver le nombre des termes, quand on a le premier, l'expoſant & le dernier*, il faut 1°. diviſer le dernier par le premier, & l'on aura pour Quotient l'expoſant élevé à une certaine Puiſſance, 2°. il faut élever l'expoſant juſques à ce qu'il ſoit monté à la valeur de ce nombre, & l'on ſaura a quelle Puiſſance l'expoſant s'éleve pour faire le dernier terme, 3°. le nombre qui indique cette Puiſſance augmenté de l'unité, donne-

Digitized by Google

ra le nombre des termes. Le premier terme eſt 4, l'expoſant 3, & le dernier terme 2916. 1°. Ce dernier terme eſt le Produit de l'expoſant élevé à une certaine Puiſſance, par le premier terme : ſi donc je diviſe 2916 par 4, l'une de ſes Racines, le Quotient 729, renfermera la Puiſſance de l'expoſant cherché, 2°. j'éleve 3 juſques ce que j'aïe 729 ; & par là je découvre que l'expoſant eſt élevé dans le dernier terme à la 6ᵉ Puiſſance, d'où je conclus qu'il y a 7 termes.

31. *Pour trouver le nombre des termes, quand on a le premier, le dernier & la ſomme*, il faut 1°. ôter le dernier de la ſomme, & l'on aura tout ce qui precede le dernier, 2°. il faut diviſer le dernier diminué du premier, par la ſomme de tout ce qui le precede, laquelle l'on vient de trouver, le Quotient fera connoître l'expoſant par l'Article 28ᵉ, lequel connu, manifeſtera le nombre des termes : le premier eſt 4, le dernier 2916, la ſomme 4372, 1°. j'ôte le dernier terme de la ſomme, le reſte 1456 m'indique tout ce qui precede le dernier, 2°. je diviſe le dernier terme diminué du premier ; c'eſt-à-dire, 2916 — 4 = 2912 par 1456, ſomme de tout ce qui precede le dernier. 3°. Le Quotient 2 m'apprend que tout ce qui precede le dernier eſt contenu 2 fois dans le dernier — le premier, je conclus de là que l'expoſant eſt 3, & par l'Article precedent je trouve le nombre des termes.

32. *Pour trouver le nombre des termes, quand on a le premier, l'expoſant & la ſomme*, il faut 1°. chercher le dernier terme par la Méthode de l'Article 20ᵉ, lequel étant trouvé, manifeſtera le nombre des termes par l'Article 30ᵉ. Le premier terme eſt 4, l'expoſant 3 & la ſomme 4372 :

Digitized by Google

cette ſomme eſt compoſée 1°. du premier terme, 2°. du dernier — le premier, 3°. de tout ce qui precede le dernier. Si donc j'ôte de cette ſomme le premier terme, le reſte 4368 contiendra deux parties, le dernier — le premier, & tout ce qui precede le dernier.

Or l'expoſant 3 m'apprend que l'une de ces parties; ſavoir celle qui contient le dernier terme — le premier, eſt double de l'autre : je n'ai donc qu'à partager 4368 en deux parties, dont l'une ſoit double de l'autre, la double ſera le dernier terme — le premier, & la ſimple ſera tout ce qui precede le dernier. Pour cet effet je diviſe 4368 par 3, & le Quotient 1456 me donne la ſomme de tout ce qui precede le dernier terme, & 2912 double de ce Quotient, m'indique le dernier terme — le premier; ſi donc j'y ajoûte 4, j'aurai 2916 pour dernier terme, & par l'Article 31^e, j'aurai le nombre des termes.

33. *Pour trouver le nombre des termes, quand on a l'expoſant, le dernier terme & la ſomme des termes*, 1°. il faut ôter le dernier terme de la ſomme des termes, ce qui reſtera ſera la ſomme de ce qui precede le dernier terme, 2°. par cette ſomme il faut diviſer le dernier terme, & alors le Quotient de cette Diviſion augmenté de l'unité donnera l'expoſant de la Progreſſion, & ce qui reſtera du Diviſé ſera le premier terme; ce qui manifeſtera le nombre des termes par l'Article 30e. L'expoſant eſt 4, le dernier terme 1280, la ſomme 1705, 1°. j'ôte le dernier terme de la ſomme, & le reſte 425 me manifeſte la ſomme de tout ce qui precede le dernier. 2°. Je diviſe le dernier terme 1280 par 425 ſomme de tout ce qui le precede, & alors le reſidu 5 m'indique le pre-

Digitized by Google

mier terme, & par l'Article 30e, en diviſant le dernier terme 1280 par le premier 5, le Quotient 256 contient l'expoſant 4 élevé à une certaine Puiſſance, en l'élevant je découvre que c'eſt la 4e, d'où je conclus qu'il y a 5 termes.

34. Quand une Progreſſion va en décroiſſant, les mêmes regles auront lieu, pourvû que l'on agiſſe à l'égard du premier terme, comme nous avons fait ici à l'égard du dernier, & à l'égard du dernier, comme nous avons fait à l'égard du premier; c'eſt-à-dire, qu'au lieu de commencer par la gauche & d'aller à la droite, l'on commencera à la droite pour monter à la gauche, tout le reſte ſuivra, expoſant, nombre, ſomme, tout revient au même.

35. Quand j'ai $\div\div a.\ b.\ c.\ d$, j'ai $a.\ b::b.\ c::c.\ d$. Donc $a.\ b::a+b+c.\ b+c+d$. Donc $a-b.\ b::a+b+c-b-c-d=a-d.\ b+c+d$. Or $a-b.\ b::\frac{a-b}{b}.\ 1$; car $a-b\times 1=a-b$. & $\frac{a-b}{b}\times b=a-b$. Donc $\frac{a-b}{b}.\ 1.::a-d.\ b+c+d$.

36. Comme une Progreſſion peut être pouſſée toûjours plus loin, & que ſans fin & ſans ceſſe chaque terme croîtra par-deſſus ſon precedent, une Progreſſion peut de même aller toûjours en diminuant, & chaque terme deviendra ſans fin & ſans ceſſe plus petit que ſon precedent.

37. De toutes les Progreſſions qui vont en diminuant, la Soudouble eſt celle dont les diminutions ſont moindres. Or dans cette Progreſſion, pour loin que l'on ſoit allé, la ſomme de tout ce qui ſuit le premier terme n'égale pas le premier terme; car comme dans la Progreſſion qui va en

Digitized by Google

croiſſant le dernier terme eſt plus grand que tout ce qui precede, puiſque le dernier — le premier eſt égal à tout ce qui precede; de même dans celle qui décroît, le premier — le dernier eſt égal à tout ce qui ſuit le premier, ſi la Progreſſion eſt Soudouble, & par conſequent le premier ſeul eſt plus grand que tout ce qui ſuit.

38. Si l'on avoit pouſſé les Subdiviſions & la ſuite de la Progreſſion juſques à un terme ſi petit que l'on pût le négliger & le regarder comme zero, alors le premier — ce dernier (regardé comme rien) & par conſequent le premier ſeul égaleroit tout ce qui ſuit, & la ſomme d'une telle Progreſſion ſeroit double du premier terme.

39. Si l'on pouvoit pouſſer une Progreſſion juſques à l'infini, en diminuant toûjours, dans cette ſuppoſition le dernier terme ſeroit d'une petiteſſe infinie; car s'il avoit la moindre grandeur, la Progreſſion pourroit encore être pouſſée plus loin, & par conſequent n'auroit pas été pouſſée à l'infini. Or dans une telle Progreſſion le premier — ce dernier infiniment petit, & le premier ſeul, c'eſt la même choſe.

40. On regarde donc comme pouſſée à l'infini une Progreſſion dont le dernier terme eſt d'une petiteſſe à négliger tout-à-fait; & on appelle infiniment petit un terme plus petit que quelque terme que l'on puiſſe aſſigner.

41. Je partage une quantité en deux parties égales. Cette quantité eſt le premier terme d'une Progreſſion qui va en décroiſſant, l'une de ſes moitiez eſt le ſecond; l'autre moitié fournira les diſtributions ſuivantes; & quand on ſeroit venu à la fin, depuis le ſecond terme incluſivement, on auroit partagé la quantité en toutes ſes parties,

Digitized by Google

qui, prises ensemble, égaleroient leur tout qui est le premier terme.

42. 1°. $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. 2°. $\frac{1}{3}$ divisé par $\frac{1}{3} = 1$. J'ai donc 3°. 1. 1 :: $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. J'ai donc $\frac{2}{3}$ pour la somme des termes qui suivent le premier, & en tout $\frac{4}{3}$. (Cela se prouve par l'Article 35.)

On suppose cette Division achevée & on bâtit là-dessus un Théorême qui est hypothetiquement vrai.

43. Si la Progression $\div$ 3. 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$, &c. est poussée à l'infini, on aura $\frac{3-1}{1}$ (=2) 1 :: 3 — 0 (=3). $\frac{3}{2}$, & la somme $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ ne sera pas double du premier terme $3 = \frac{6}{2}$.

CHAPITRE XIII.

Des Raisons Composées.

Une Raison est une Quantité.

1. PUisque ce qu'on appelle *Raison* en Mathematique, est une maniere de contenir, ou d'être contenu, elle peut croître ou diminuer; car une Grandeur peut en contenir d'autres plus ou moins. Il suit de là que les *Raisons* des Quantitez sont elles mêmes des Quantitez, lesquelles par consequent on peut ajoûter les unes aux autres, ou retrancher les unes des autres; & puisque la Multiplication n'est autre chose qu'une Addi-

Digitized by Google

tion réïterée, il s'enſuit que l'on peut multiplier une Raiſon par une autre; c'eſt-à-dire, on peut ajoûter la même Raiſon pluſieurs fois, & par conſequent autant de fois que l'Antecedent d'une ſeconde Raiſon eſt contenu dans ſon Conſequent. Par une telle *Compoſition*, ou une telle *Multiplication*, on fait naître une Raiſon dont le nouvel Antecedent eſt contenu dans ſon Conſequent, d'autant plus de fois que l'Antecedent d'une autre Raiſon eſt contenu dans ſon Conſequent,

Ma premiere *Raiſon* eſt celle de 2 à 6, la ſeconde eſt celle de 4 à 8. Je veux faire en ſorte que l'Antecedent 2 ſe trouve contenu dans un nouveau Conſequent plus de fois, & d'autant plus de fois que 4 eſt contenu dans 8. Or 4 eſt en 8 deux fois; il faudra donc que l'Antecedent 2 ſoit contenu dans ſon Conſequent deux fois plus, & pour cela il n'y a qu'à doubler ſon Conſequent, & j'aurai la Raiſon de 2 à 12, compoſée ou multipliée de la Raiſon de 2 à 6, & de la Raiſon de 4 à 8. Ou bien, ſans faire de reduction, je multiplie 2 par 4 & 6 par 8, & j'ai la Raiſon de 8 à 48, la même que de 2 à 12, parce qu'au lieu de prendre 2 une fois, je le prends 4 fois, & au lieu de doubler 6, j'en prends 4 fois le double, en le multipliant par 8.

Maniere de compoſer des Raiſons.

2. *Compoſer une Raiſon de deux autres*, ce ſera donc multiplier le premier terme de la premiere par le premier terme de la ſeconde, & le ſecond terme de la premiere par le ſecond terme de la ſeconde. Cela fait l'on aura deux Produits, qui auront entr'eux une certaine Raiſon, & l'on appellera cette Raiſon *compoſée des deux Raiſons precedentes*, dont les termes ont ſervi à former ces deux Produits.

Digitized by Google

Que le premier Antecedent ſoit a, & le premier Conſequent ſoit b. Si maintenant on multiplie la Grandeur a par c, l'on aura ac; & ſi l'on multiplie la Grandeur b par d, l'on aura bd, & la Raiſon de ces deux termes ainſi multipliez ſera celle de l'Antecedent ac au Conſequent bd, laquelle Raiſon reſultera d'un côté de la Multiplication de a par c, & d'un autre de la Multiplication de b par d. La Raiſon des Multipliez étoit celle de a à b, & la Raiſon des Multiplians étoit celle de c à d, l'Antecedent a a donc été multiplié par rapport à ſon Conſequent b, ſuivant que c eſt grand par rapport à d.

Si je n'avois point touché à b, & que j'euſſe ſeulement multiplié a par c, j'aurois augmenté la Raiſon de a à b, ſuivant que c eſt grand par-deſſus l'unité. Si après cela j'avois auſſi multiplié b par c, en augmentant b autant que a, je n'aurois point changé la Raiſon de a à b; mais puiſqu'après avoir multiplié a par c, j'ai ſeulement multiplié b par d, cette ſeconde Multiplication a fait que la Raiſon de a à b, s'eſt augmentée, non ſimplement, ſuivant que c contient l'unité, mais ſuivant que c contient d.

En un mot, pour connoître le Rapport des Grandeurs Compoſées ac & bd, il faut connoître ces Grandeurs; & pour les connoître, il faut connoître d'un côté a & b, d'un autre c & d, & enfin ce que vaut a multiplié par c, & ce que vaut b multiplié par d.

3. Quand j'ai a pour Antecedent & b pour Conſequent, ſi je multiplie a par c, la Raiſon de ac à b devient plus grande de la valeur de c; car a contient b plus de fois à proportion qu'il devient

plus grand, & il devient plus grand à proportion que c contient l'unité.

Mais je ne devois pas augmenter la Raiſon de a à b, ſuivant toute la Grandeur de c, mais ſuivant le Rapport de c à d.

Il faut donc faire un nouveau changement, & diminuer ac à proportion que d eſt grand; c'eſt-à-dire, le diviſer par d, ou augmenter ſon Conſequent b à proportion que d eſt grand, c'eſt-à-dire le multiplier par d.

Alors on aura la Raiſon de ac à bd, differente de la Raiſon precedente de a à b, non à proportion que c eſt grand, ou qu'il contient l'unité, mais a proportion qu'il eſt plus grand par rapport à d, ou qu'il le contient.

4. L'on a donc une *Raiſon Compoſée* de deux autres, lorſque l'Antecedent de la Compoſée contient le Produit des deux premiers Antecedens qui la compoſent, & ſon Conſequent le Produit des Conſequens.

5. C'eſt la même choſe de multiplier deux Raiſons, ou de multiplier les expoſans de ces deux Raiſons, parce que l'expoſant d'une Raiſon, c'eſt cette Raiſon même exprimée en de petits termes. Ainſi l'expoſant de 12 à 8, c'eſt $\frac{3}{2}$, & l'expoſant de 12 à 15, c'eſt $\frac{4}{5}$. Si je multiplie 12 par 12, j'ai 144, & ſi je multiplie 8 par 15, j'ai 120. La Raiſon de 144 à 120 eſt donc compoſée de celle de 12 à 8, & de celle de 12 à 15. Mais ſi je me ſers des expoſans, je multiplie 3 par 4, & j'ai 12; enſuite 2 par 5, & j'ai 10, & cette Raiſon de 12 à 10 ſe trouve la même que celle de 144 à 120.

120. Car cette troiſiéme Raiſon 144 à 120, & ſon expoſant, c'eſt la même choſe, la ſeconde & la premiere ſont auſſi la même choſe que leurs expoſans; par conſequent c'eſt tout un de multiplier l'expoſant de la premiere par l'expoſant de la ſeconde, ou de multiplier la premiere par la ſeconde; par l'une & par l'autre de ces Méthodes l'on a pour Produit la même Raiſon, quoiqu'exprimée en differens termes.

Que l'expoſant de b à c ſoit e, & l'expoſant de d à f ſoit g, à la place de c, je dirai be, & à la place de f, je dirai dg, & en multipliant les Antecedens, j'aurai bd, comme en multipliant les Conſequens, j'aurai cf, ou $bedg$; or l'expoſant de bd à $bedg$, c'eſt eg Produit de e par g.

6. Si l'on range de ſuite pluſieurs Grandeurs, comme b, c, d, e, f, la Raiſon de la premiere à la troiſiéme, ſera compoſée de la premiere à la ſeconde, & de celle de la ſeconde à la troiſiéme; c'eſt-à-dire, que la Raiſon de b à d ſera compoſée de bc & de cd; car ſi l'on multiplie les Antecedens de ces deux Raiſons, on aura bc, & ſi l'on multiplie leurs Conſequens, on aura cd, laquelle Raiſon de bc à cd, eſt viſiblement compoſée de la Raiſon de b à c, & de celle de c à d: or puiſque c & d ont été multipliez par la même Grandeur c, il s'enſuit par le 8e Article des Proportions Geometriques, que la Raiſon de b à d eſt la même choſe que la Raiſon de bc à cd. Je prouverai de même que la Raiſon de b à c eſt compoſée de la Raiſon de b à c, de celle de c à d, & de celle de d à e; & par conſequent de celle de bc à cd, & de d à e; & en general la Raiſon d'une Grandeur à une autre, eſt compoſée des Raiſons de toutes les Interpoſées.

Des Raiſons compoſées ſe trouvent par tout.

Digitized by Google

J'ai *a. b. c. d. e. f. g* : je dis que *a. g.* : : *ab cdef. bcdefg* ; car *abcdef*, c'eſt *bcdef* × *a*, & *bcdefg*, c'eſt *bcdef* × *g*.

Or *bcdef* × *a. bcdef* × *g* : : *a. g.* Les Produits d'une même Grandeur par divers Multiplians ſont entr'eux comme ces Multiplians.

7. De là & de l'Article 5e il s'enſuit que l'expoſant de la Raiſon de la premiere Grandeur à la 3e, c'eſt l'expoſant de la premiere à la ſeconde, multiplié par celui de la ſeconde à la 3e, & l'expoſant de la premiere à la 4e, c'eſt l'expoſant de la premiere à la 3e, multiplié par celui de la 3e à la 4e. J'ai *b, c, d, f*; que l'expoſant de *b* à *c* ſoit *g*, l'expoſant de *c* à *d* ſoit *h*, l'expoſant de *d* à *f* ſoit *m*; au lieu de *b, c, d, f*, j'ai *b, bg, bgh, bghm*. Or l'expoſant de *b* à *f*, ou *bghm*, c'eſt *ghm*.

Si l'on a *b. c* : : *d. f* : : *g. h* : : *k. m*, on les rangera ainſi,

b. c : : *d. f*
g. h : : *k. m*

Si on multiplie, on aura *bg. ch* : : *dk. fm*.

Demonſtration. On a le même expoſant *e* : on a donc *b. be* : : *d. de* : : *g. ge* : : *k. ke*

g. ge : : *k. ke*

Donc *bg. bgee* : : *dk. dkee*. Il y a Proportion, car il y a même expoſant.

Eſpeces des Raiſons Compoſées.

8. Une Raiſon compoſée de deux égales, s'appelle *Raiſon Doublée*. Celle qui reſulte de la Multiplication de trois égales, s'appelle *Raiſon Triplée*; de même ſi l'on a 4 Raiſons égales, & que l'on multiplie l'Antecedent de la premiere par l'Antecedent de la ſeconde, ce Produit par l'Antecedent de la 3e, & celui-ci derechef par l'Antecedent de la 4e. Si l'on fait encore la même choſe à l'égard

Digitized by Google

des Conſequens, l'on dira que ces deux Produits ſont entr'eux en Raiſon quadruplée du premier Antecedent au premier Conſequent.

9. Par là il eſt manifeſte que les Quarrez ſont en Raiſon *doublée*, les Cubes en Raiſon *triplée*, les quatriémes Puiſſances en Raiſon *quadruplée* de leurs Racines, ainſi à l'infini; car quand pour avoir le Quarré *aa*, je multiplie *a* par *a*, c'eſt comme ſi j'avois les deux Raiſons *a*. 1 : : *a*. 1, & que je multipliaſſe les Antecedens pour avoir *aa*, & deux Conſequens pour avoir 1, car la Raiſon de *aa*. 1 eſt doublée de celle de *a*. 1.

10. Dans une Progreſſion Geometrique la Raiſon du premier terme au 3e eſt doublée de celle du premier au ſecond, & celle du même premier au 4e eſt triplée de celle du premier au ſecond, ainſi de ſuite; car par l'Article 6e la Raiſon d'un terme à un autre eſt compoſée de la Raiſon des Interpoſez, qui eſt ici la même Raiſon, laquelle par conſequent priſe deux fois fait une Raiſon Doublée, priſe trois fois une Raiſon Triplée, ainſi de ſuite.

Progreſſion des Puiſſances.

11. Toutes les Puiſſances d'une Racine rangées par ordre, forment une Progreſſion Geometrique; car le Produit de deux termes eſt toûjours égal au Quarré du moïen.

Et de leurs Racines.

12. Si les Racines ſont en Progreſſion, les Puiſſances formées de ces Racines le ſeront auſſi; car nous avons prouvé que ſi *a*. *b* : : *c*. *d*, & que l'on ait 4 autres Grandeurs *e*, *f*, *g*, *h*, qui ſoient auſſi entr'elles en Proportion, on aura *a*. *e* : : *b*. *f* : : *c*. *g* : : *d*. *h*; par conſequent ſi *a*. *b* : : *c*. *d*. *aa*. *bb* : : *cc*. *dd*.

Que l'expoſant de *a* à *b* ſoit *e*, on aura *a*. *ae* : : *c*. *ce*.

Les Quarrez ſeront *aa*. *aaee*. *cc*. *ccee*, &

ces Quarrez ſont viſiblement en Proportion, puiſqu'ils ont le même expoſant $e\,e$, & cet expoſant eſt le Quarré de l'expoſant des Racines.

13. D'où il ſuit que ſi les Puiſſances de même degré, de deux ou pluſieurs Grandeurs ſont en Progreſſion, les Racines le ſeront auſſi.

Théorême ſur les ſommes des Termes d'une Proportion.

14. Dans une Proportion de 4 termes, ſi le premier eſt le plus grand des quatre, la ſomme des deux extrêmes ſurpaſſe celle des deux moïens.

Quand j'ai $a.\ b::c.\ d$, ſi a eſt le plus grand, puiſque b eſt plus petit que a, d ſera auſſi plus petit que c; & comme j'ai *Alternando* $a.\ c::b.\ d.$ d ſera auſſi plus petit que b, j'ai $a.\ b::c.\ d.$ Donc *Dividendo* $a-b.\ c-d::a.\ c.$ Donc $a-b$ eſt plus grand que $c-d$. Ajoûtons de côté & d'autre $b+d$. Nous aurons $a+b+d\rhd c+b+d$, ou $a+d\rhd c+b$.

$-b$ $-d$

12. 9 : : 8. 6. Donc 12. 8 : : 9. 6. Donc 12 — 9. 8 — 6 : : 12. 8. D. 12 — 9 ⊳ 8 — 6. D. 12 — 9 + 6 + 9 ⊳ 8 — 6 + 6 + 9. D. 12 + 6 ⊳ 8 + 9.

Si le 4e étoit le plus grand, on viendroit à la même concluſion en faiſant $d\ c::b.\ a.$

Dans la Proportion continuë $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $a.\ b.\ c.$ $a+c\rhd 2b$, ou $a+c\lhd 2b$; car on a $a.\ b::b.\ c$, & dans cette Proportion continuë un des extrêmes eſt neceſſairement le plus grand & l'autre le plus petit.

Raiſons des termes d'une Progreſſion Geometrique.

15. Si j'ai deux Progreſſions $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$, la premiere b, c, d, la ſeconde f, g, h. 1°. $b.\ d::f.\ h.$ ſi $b.\ c::f.\ g$; car la Raiſon de b à d eſt doublée de celle de b à c, & celle de f à h eſt doublée de

celle de f à g. Or quand ces Raiſons Compoſantes ſont les mêmes, les Compoſées doivent auſſi être les mêmes.

Les Quarrez de deux termes qui ſe ſuivent immediatement, ſont entr'eux comme le premier de ces termes à celui qui ſuit le ſecond ; c'eſt-à-dire, que dans la Progreſſion $\div\div b. c. d$, $bb. cc :: b. d$, la Raiſon de bb à cc; c'eſt-à-dire, la Raiſon des Quarrez eſt doublée de celle de b à c, & la Raiſon de b à d par l'Article 10e eſt auſſi doublée de celle de b à c.

16. Par le même Article, il eſt manifeſte que les Cubes de deux termes ſont entr'eux comme le premier de ces termes eſt au quatriéme dans la Progreſſion. Il s'enſuit de même que dans la Progreſſion b, c, d, e, f. $b^4. c^4 :: b. f$, j'ai $b. d :: d. f$, j'aurai donc (en inſerant des Moïens Proportionnels à la Progreſſion) $\div\div b. c. d. e. f$; & par conſequent j'aurai $b. c :: c. d :: d. e :: e. f$, & en joignant Antecedens à Antecedens, & Conſequens à Conſequens, j'aurai $b+c+d+e. c+d+e+f :: b. c$, ou comme $c. d$; & ſi je joins ſeulement les 3 premiers Antecedens enſemble, j'aurai $b+c+d$, & en joignant les 3 derniers Conſequens dont la Raiſon eſt la même que celle des 3 premiers Antecedens, puiſque c'eſt la même Raiſon qui regne dans la Progreſſion, j'aurai $b. c :: b+c+d. d+e+f$.

Dans la Progreſſion $aa. ab. bb. bc. cc$, j'ai $aa. bb :: bb. cc$; car aa eſt à bb en Raiſon doublée de l'expoſant de la Progreſſion, & bb eſt à cc en Raiſon doublée du même expoſant.

Donc $aa. bb :: bb. cc$. Donc $aa+bb. bb+cc :: aa. bb$.

Dans la même Progreſſion j'ai $aa. ab :: bb. bc$.

Donc *Alternando* $aa. bb :: ab. bc$. Or $ab. bc :: 2ab. 2bc$. Donc $aa. ab :: 2ab. 2bc$. Donc $2ab. 2bc :: aa + bb. bb + cc$.

Donc $aa + bb + 2ab. bb + cc + 2bc :: aa + bb. bb + cc$.

Or $aa + bb. bb + cc :: aa. bb$. Donc $aa. bb :: aa + 2ab + bb. bb + 2bc + cc$.

Quand on a $\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}$ $a. b. c. d$

$\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}$ $a. b. c. d$

On aura .... $\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}$ $aa. bb. cc. dd$

On a auſſi ... $\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}$ $a. b. c. d$

On aura donc $\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}$ $a^3. b^3. c^3. d^3$

$\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}$ $b. c. d. e. f$. D. $b. f :: b^4. c^4$.

Demonſtration. $b. c$ / $c. d$ / $d. e$ / $e. f$ } D. $bcde. cdef$ en Raiſon compoſée de b à c, de c à d, de d à e, de e à f.

Ces quatre Raiſons ſont les mêmes. Donc $bcde$ eſt à $cdef$ en Raiſon quadruplée de b à c. D. $bcde. cdef :: b^4. c^4$.

Or $bcde. cdef :: b. f$; car $\frac{bcde}{cdef} = \frac{b}{f}$. D. $b. f :: b^4. c^4$.

17. Dans une Progreſſion le premier terme eſt au 3e, comme la ſomme des Quarrez du premier & du ſecond eſt à la ſomme des Quarrez du ſecond & du 3e. J'ai en Progreſſion b, c, d, je dis que $b. d :: bb + cc. cc + dd$.

Demonſtration. Puiſque $b. c :: c. d. bb. cc :: b. d$ (par l'Article 15.) Or par le 12e Article $bb. cc :: cc. dd$, & par conſequent (par l'Article 10e des Proportions) $bb + cc. cc + dd :: bb. cc$, & par conſequent $bb + cc. cc + dd :: b. d$.

18. Par la même Méthode & les mêmes Arti-

Digitized by Google

cles, on prouvera que dans la Progreſſion $b, c, d, e.$ $b^3 + c^3 + d^3 . c^3 + d^3 + e^3 :: b . e.$

19. Le Produit de deux Grandeurs eſt Moïen Proportionnel entre les Quarrez de ces Grandeurs aa, ab, bb, ſont en Progreſſion ; car le Produit des deux extrêmes eſt $aabb$, & $aabb$ eſt le Quarré de la Moïenne ab. J'ai en quarrez $aa . bb :: bb . cc$. Donc en inſerant les Moïens Proportionnels, j'aurai la Progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} aa . ab . bb . bc . cc$, & en operant ſuivant l'Article precedent, j'aurai $aa . bb :: aa + ab + bb . bb + bc + cc$, & puiſque $ab . bc :: 2ab . 2bc$, j'aurai $aa . bb :: aa + 2ab + bb . bb + 2bc + cc$; c'eſt-à-dire, que *ſi le Quarré de la premiere Grandeur Incomplexe eſt au Quarré de la ſeconde, comme le Quarré de la ſeconde eſt au Quarré d'une 3e : le premier Quarré ſera au ſecond, comme le Quarré des deux premieres Grandeurs eſt au Quarré des deux ſuivantes.*

20. Cette Table expose tous les Moïens Proportionnels entre les Puissances, ce que l'on prouvera, comme l'on a fait dans l'Article precedent; savoir, en égalant toûjours le Produit des termes extrêmes au Produit de celui qui se trouve placé entre deux.

aa	ab	bb									
a	aab	abb	b^3								
a^2	a^2b	$aabb$	ab^3	b^4							
a^3	a^3b	a^2bb	a^2b^3	ab^4	b^5						
a^4	a^4b	a^3bb	a^3b^3	aab^4	ab^5	b^6					
a^5	a^5b	a^4bb	a^4b^3	a^3b^4	aab^5	ab^6	b^7				
a^6	a^6b	a^5bb	a^5b^3	a^4b^4	a^3b^5	aab^6	ab^7	b^8			
a^7	a^7b	a^6bb	a^6b^3	a^5b^4	a^4b^5	a^3b^6	aab^7	ab^8	b^9		
a^8	a^8b	a^7bb	a^7b^3	a^6b^4	a^5b^5	a^4b^6	a^3b^7	aab^8	ab^9	b^{10}	
a^9	a^9b	a^8bb	a^8b^3	a^7b^4	a^6b^5	a^5b^6	a^4b^7	a^3b^8	aab^9	ab^{10}	b^{11}
a^{10}	$a^{10}b$	a^9bb	a^9b^3	a^8b^4	a^7b^5	a^6b^6	a^5b^7	a^4b^8	a^3b^9	aab^{10}	ab^{11}	b^{12}
a^{11}	$a^{11}b$	$a^{10}bb$	$a^{10}b^3$								
a^{12}											

Digitized by Google

21. De 1 à a^9, je vais en progreſſion ∴ 1. a. aa. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9.

De 1 à b^9, je vais de même en diſant ∴ 1. b. bb. b^3. b^4. b^5. b^6. b^7. b^8. b^9.

Il y a autant de moïens proportionnels entre 1 & a^9, qu'entre 1 & b^9.

Je dis qu'il y en aura préciſément autant entre a^9 & b^9. La conſtruction de la Table en contient la preuve.

Compoſition de la Table.

22. On peut ranger les Puiſſances de a en commençant par la plus haute, & en deſcendant juſqu'à 1. Sous elles on placera la Progreſſion des Puiſſances de b, en commençant par l'unité. On multipliera la quantité ſuperieure par l'inferieure, & l'on aura la diſpoſition des termes des Puiſſances auxquelles il n'y aura qu'à ajoûter les Coëfficiens.

a^7. a^6. a^5. a^4. a^3. aa. a. 1.
1. b. bb. b^3. b^4. b^5. b^6. b^7.

Les Produits des deux extrêmes ſeront toûjours égaux aux Produits de deux Moïens à égale diſtance, l'un du premier & l'autre du dernier des extrêmes.

En particulier des Coëfficiens.

23. Pour avoir les Coëfficiens, on écrira les expoſans { 7 6 5 4 3 2 1 / 1 2 3 4 5 6 7 }

1°. $\frac{7}{1}$ ſera le premier Coëfficient, on aura donc d'abord après a^7, $7\,a^6 b$.

2°. On multipliera les deux ſuperieurs (7×6) pour avoir un Numerateur, & les deux inferieurs (1×2) pour avoir un Denominateur, & on aura $\frac{42}{2} = 21$. On écrira donc pour troiſiéme terme $21\,a^5\,bb$.

3°. Cette Fraction, on la multipliera par $\frac{5}{3}$, &

Digitized by Google

on aura $\frac{210}{6} = \frac{35}{1}$, & on aura pour quatriéme terme $35a^4b^3$.

24. Quand on veut deſigner l'élevation d'une quantité à une Puiſſance quelconque, on emploie pour expoſant une Lettre indeterminée, par exemple m, & on a $a^m . a^{m-1} . a^{m-2} . a^{m-3} . a^{m-4}$. &c. deſſous on écrira $1\ b\ bb\ b^3\ b^4$, & par là on aura $a^m . a^{m-1}b . a^{m-2}bb . a^{m-3}b^3 . a^{m-4}b^4$, &c.

Pour avoir les Coëfficiens, on écrira : $\frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5}$.

Les Coëf. ſeront, $\frac{m}{1} . \frac{m \times m-1}{1 \times 2} . \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} . \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$.

Par là le 3e terme, par exemple, ſeroit $\frac{m \times m-1}{2} \times a^{m-2} \times bb$: & puiſque $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$; c'eſt-à-dire égal à a élevé à une Puiſſance d'un degré au-deſſous de celle qui eſt marquée par l'expoſant m, a^{m-2} ſera $= \frac{a^m}{aa}$, & on aura pour troiſiéme terme $\frac{m \times m-1 \times a^m bb}{2aa}$.

Subſtitution de Signes.

25. Si l'on fait $a = P$ & $\frac{b}{a} = Q$, on aura $a^m = P^m$ & $\frac{bb}{aa} = Q^2$, & pour troiſiéme terme $\frac{m \times m-1}{2} \times P^m Q^2$.

Si $P^m = A$, on aura $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} A Q$.

Digitized by Google

Si $\frac{m}{1} P^n Q = B$, comme $\frac{m}{1} P^n Q^2 = \frac{m}{1} P^n Q * Q$. $\frac{m}{1} P^n Q^2$ ſera $= B * Q$, & $\frac{m \times m-1}{1 \times 2} * P^n Q^2$ ſera $= \frac{m-1}{2} B Q$.

Un des grands ſoins d'un Algebriſte eſt de s'accoûtumer à ſubſtituer un Signe à un autre, ou afin de rendre ſes Calculs moins chargez de Lettres, ou pour faire en ſorte que les divers Membres qu'il compare, paroiſſent exprimez ſous des mêmes Lettres. Avertiſſement.

26. Pour trouver un Moïen proportionnel entre deux Grandeurs, 1°. Il les faut multiplier l'une par l'autre. 2°. Il faut extraire la Racine quarrée de ce Produit, & cette Racine ſera le Moïen proportionnel cherché, puiſque ſe multipliant elle-même, elle formera un Quarré égal au Produit des deux extrêmes. Des Moïens Proportionnels.

27. Pour trouver deux Moïens proportionnels, il faut ſe ſouvenir que dans une Progreſſion de 4 termes, le Cube du premier eſt au Cube du ſecond, comme le premier au 4e. Il faut donc faire une Regle de Trois, & dire comme *b* le premier, eſt à *d* le 4e, ainſi *b*³ Cube du premier eſt à un 4e terme, que la Regle de Trois donnera; lequel terme ſera Cube du ſecond : dès que l'on a le ſecond terme d'une Progreſſion, l'on aura le 3e par l'Article precedent.

28. Et pour trouver tant de Moïens proportionnels que l'on voudra, il faudra dire, comme le premier eſt au dernier, ainſi une certaine Puiſſance du premier (plus ou moins grande, ſuivant que l'on demande plus ou moins de termes proportionnels, laquelle Puiſſance ſe reglera par l'Ar-

Digitized by Google

ticle 15e); ainſi, dis-je, le premier terme élevé à cette Puiſſance, eſt au ſecond élevé à la même Puiſſance. Si, par exemple, entre b & m on veut que j'établiſſe dix Moïens proportionnels, le premier de la Progreſſion étant b. Pour découvrir le ſecond, je fais $b. m :: b^{11}. \frac{mb^{11}}{b} = mb^{10}$. Donc la Racine de mb^{10} eſt mon ſecond terme.

Appellons cette Racine c, reſte 9 termes à chercher entre c & m.

Pour avoir le premier de ces neuf, je dis $c. m :: c^{10}. \frac{mc^{10}}{c} = mc^{9}$, & j'ai la Racine de mc^{9} pour 3e terme. Je l'appelle d, & j'aurai pour 4e terme la Racine de md^{8}.

Ou je fais $bb. cc :: b. \frac{bcc}{bb} = \frac{cc}{b}$. Dès-là on aura $b. c. \frac{cc}{b}. \frac{c^3}{bb}. \frac{c^4}{b^3}$, &c.

29. *Dans une Proportion de 4 termes le Produit des Moïens*, (ou le Produit des extrêmes égal à celui des Moïens) *eſt le Moïen proportionnel entre le Produit des Antecedens & celui des Conſequens* $a. b :: c. d.$, je dis que $\therefore ac. bc. bd.$

Demonſtration. $a. b :: ac. bc.$ & $c. d :: bc. bd.$ Or $a. b :: c. d.$ D. $ac. bc :: bc. bd.$

Théorêmes ſur les Quarrez des Termes d'une Proportion ou Progreſſion.

30. *Dans une Proportion de 4 termes, les Quarrez des deux termes de l'une des Raiſons, ſont entr'eux comme le Produit des Antecedens eſt au Produit des Conſequens* $a. b :: c. d$, je dis que $aa. bb :: ac. bd$; car $a. c :: aa. ac$. D. $aa. ac :: b. d$. Or $b. d :: bb. bd$. D. $aa. ac :: bb. bd$. & *Alternando* $aa. bb :: ac. bd$.

31. Pour trouver la ſomme des Quarrez de tous les termes d'une Progreſſion. 1°. On exprime les

Digitized by Google

termes ſuivant l'Article dixiéme des Progreſſions Geometriques. 2°. On quarre aiſément chacun de ces termes ainſi exprimez. 3°. Ces Quarrez (par l'Article 13e des Raiſons Compoſées ſont en Progreſſion), & dans l'Article 6e des Progreſſions, l'on a donné la Méthode de réduire aiſément tous les termes d'une telle Progreſſion en une ſomme.

32. Dans la Progreſſion b, c, d, le Quarré de $b + c$ eſt au Quarré de $c + d :: b. d$, & dans la Progreſſion b, c, d, e, le Cube $b + c + d$ eſt au Cube de $c + d + e :: b. e$. Je dis donc que $bb + 2bc + cc. cc + 2dc + dd :: b. d$.

Demonſtration. Puiſque l'on a la Progreſſion $\div b, c, d, e$, il s'enſuit que $b. c :: c. d$. D. tous les Antecedens $b + c + d$ ſont à tous les Conſequens $c + d + e :: b. c$; & puiſque ſi les Racines ſont en proportion, les Puiſſances le ſont auſſi, l'on aura $b^3. c^3 ::$ le Cube de $b + c + d$ eſt au Cube de $c + d + e$, & ainſi de toutes les Puiſſances.

33. Dans la Progreſſion b, c, d; $bb - cc. cc - dd :: b. d$.

Demonſtration. Nous avons déja prouvé que $bb. cc :: b. d$, & nous avons auſſi prouvé que $cc. dd :: bb. cc$: or par l'Article 10e des Proportions, ſi $bb. cc :: cc. dd$. $bb - cc$ ſera à $cc - dd :: bb. cc$. D. $bb - cc. cc - dd :: b. d$ (Articles 16, 17, 19, 21.)

34. Dans une Progreſſion, *ſi le premier terme meſure exactement le dernier, il meſure auſſi tous les autres.* Des Meſures communes aux Termes d'une Progreſſion.

J'ai $\div a. b. c. d. e$, ſi a meſure exactement e, ou en eſt une Partie Aliquote, il meſurera auſſi exactement tous les autres.

Que l'expoſant de la Progreſſion ſoit f, car tous les rapports d'une Progreſſion ont le même expo-

Digitized by Google

ſant. Elle s'exprimera ainſi $a.\ af.\ aff.\ af^3.\ af^4 = e$,

Or f meſure exactement pluſieurs f^4, & en general ſes Puiſſances. Donc pluſieurs f meſurera exactement pluſieurs f^4. Donc af meſure exactement af^4.

Par la même raiſon, af meſurera af^3, aff. Or $af.\ aff :: a.\ af$. Donc ſi af eſt Soumultiple de aff, a ſera Soumultiple de af.

Il ſuit de là que ſi une Puiſſance en diviſe exactement une autre, la Racine de celle-là diviſera exactement la Racine de celle-ci.

b^4 eſt Partie Aliquote de d^4. Donc b. eſt Partie Aliquote de d.

Faiſons la Progreſſion $\div\div b^4.\ b^3\ d.\ bbd\ d.\ bd^3.\ d^4$. Que ſon expoſant ſoit e, on aura $\div\div b^4.\ eb^4.\ eeb^4.\ e^3b^4.\ e^4b^4 = d$. e eſt Partie Aliquote de e^4. Donc pluſieurs fois e formeront une Partie Aliquote d'autant de fois e^4, & eb^4 ſera Partie Aliquote de e^4b^4.

Par la même raiſon, eb^4 eſt Partie Aliquote de eeb^4. Or $eb^4.\ eeb^4 :: b^4.\ eb^4$. Donc b^4 diviſe exactement eb^4. Or $b^4.\ eb^4 :: b^4.\ b^3d$. Donc b^4 meſure exactement b^3d.

Mais $b^4.\ b^3d :: b.\ d$; car $b^4 = b \times b^3$, & $b^3d = d \times b^3$. Donc ſi b^4 eſt Soumultiple de b^3d, b ſera Soumultiple de d.

Théorêmes ſur la generation des Racines Quarrées, & des autres Puiſſances.

35. Si b & d ſont des Quarrez, leur Produit bd ſera un Quarré.

Si b eſt Quarré, il a une Racine; appellons-la c, & f la Racine de d. $cc = b.\ ff = d$, & $ccff = bd$. Or $ccff$ eſt un Quarré qui a pour ſa Racine cf.

36. Toute Puiſſance d'un Quarré eſt un Quarré, & d'un Cube eſt un Cube.

L'expoſant d'un Quarré, c'eſt 2, celui d'un

Digitized by Google

Cube eſt 3. Or par quelque nombre que l'on multiplie 2, l'on aura toûjours un Produit qui ſe partagera en deux parties égales, & par quelque nombre que l'on multiplie 3, on aura toûjours un Produit qui ſe partagera en trois parties égales. Ainſi à quelque Puiſſance qu'on éleve l'expoſant 3, on pourra toûjours prendre le tiers de cet expoſant, ce qui ſera une Racine Cube de cette Puiſſance. On peut étendre ce raiſonnement à toutes les autres Puiſſances.

37. Quand on a $b.c::d.f$. Si b c & d ſont des Quarrez, f en ſera auſſi un, $b.c::d.f$. Donc $cd=bf$. Or cd Produit de deux Quarrez, eſt un Quarré. Donc bf eſt un Quarré.

Or 1. $f::b.bf$, & comme il y a un Moïen proportionnel entre les Quarrez b & bf, il faut auſſi qu'il y en ait un entre les deux termes de la premiere Raiſon 1 & f. Appellons-le g, on aura $1.g.f$. Donc $gg=1f$. Donc f eſt un Quarré qui a pour ſa Racine g.

CHAPITRE XIV.

Des Fractions.

1. DEs que l'on aura compris ce que nous avons établi dans l'Arithmetique ſur la nature des Fractions, l'on conviendra 1°. Que le *Numerateur* & le *Denominateur* forment entr'eux une *Raiſon*, & que le Denominateur eſt au Numerateur, comme l'unité à la valeur de la Fraction; car le Denominateur exprimant en combien de parties l'unité a été diviſée, toutes ſes parties enſemble égalent l'unité, & par conſequent peuvent être

Raiſon du Numerateur au Denominateur.

Digitized by Google

miſes à ſa place ; & le Numérateur marquant combien l'on prend de ces parties, marque par conſequent quelle portion l'on prend de l'unité. J'ai $\frac{5}{12^c}$, cela m'apprend 1°. que la choſe dont il s'agit a été diviſée en 12 parties ; appellons cette choſe-là z, & chacune de ces 12 parties y ; donc $z = 12y$, & $\frac{5}{12} = 5y$, or $5y$, valeur de la Fraction, eſt à z, ou à $12y$ valeur de la choſe, comme 5 eſt à 12 ; par conſequent la valeur de la Fraction eſt à l'unité, qui marque la choſe entiere, comme le Numerateur eſt au Denominateur.

2. Nous avons ſuffiſamment parlé dans l'Arithmetique de l'Addition des Fractions, & de leur Souſtraction : nous avons encore expliqué & demontré tous les Problêmes qui ſervent à ces deux Operations ; & dans l'explication de la Regle de Trois, nous avons encore montré comment l'on peut ſe paſſer de la Multiplication des Fractions & de leur Diviſion : nous allons ajoûter ici ce que c'eſt.

Multiplication.

3. Le nombre qui dans la Multiplication porte le nom de *Produit*, eſt au Multiplié, comme le Multipliant à l'unité ; c'eſt-à-dire, que quand je fais un Produit, je prens *a* le Multiplié, plus ou moins, ſuivant que l'unité ſe trouve plus ou moins dans le Multipliant *b*.

4. Lors donc que la Fraction multipliante $\frac{a}{b}$ vaut moins que l'unité, je prends la Fraction multipliée $\frac{c}{d}$ moins qu'une fois ; de ſorte que le Denominateur *b* ſera moindre en valeur que l'unité, & par conſequent puiſqu'un Denominateur vaut d'autant

d'autant moins qu'il eſt exprimé en plus grands nombres, le Denominateur de la Fraction que je cherche pour Produit, ſurpaſſera le Denominateur d, ſuivant la grandeur du Denominateur b. Or un tel Denominateur eſt juſtement bd. Maintenant cette partie bd ſe prend plus ou moins de fois, 1°. ſuivant la grandeur du Numerateur a, puiſque l'on multiplie non pas ſimplement la Fraction $\frac{1}{b}$, mais la Fraction $\frac{a}{b}$. 2°. Le Numerateur de bd ſera grand, ſuivant la grandeur de la quantité c, puiſque l'on prend une certaine partie de la Fraction $\frac{a}{b}$, non pas une fois ſeulement, mais pluſieurs fois ſuivant la grandeur de la quantité c; comme donc on avoit bd pour Denominateur du Produit, on a ac pour Numerateur; & en general, pour multiplier une Fraction par une autre, il faut 1°. multiplier les Numerateurs, & on aura le Numerateur du Produit. 2°. Il faut encore multiplier les Denominateurs, & on aura le Denominateur du Produit, $\frac{a}{b}$ eſt le Multiplant, $\frac{c}{d}$ le Multiplié; le Produit que je cherche ſera grand ou petit en comparaiſon de $\frac{c}{d}$, ſuivant que $\frac{a}{b}$ eſt grand ou petit en comparaiſon de l'unité. Or la valeur de $\frac{a}{b}$ en comparaiſon de l'unité dépendant du Numerateur & du Denominateur, il me faut multiplier ma Fraction $\frac{c}{d}$ par l'un & par l'autre terme. En multipliant Dénominateur par Denominateur bd, je diminuë ma Fraction $\frac{c}{d}$ ſuivant

que b eſt au-deſſous de l'unité ; mais comme la valeur de la Faction multipliante $\frac{a}{b}$ ne ſe meſure pas par le ſeul Denominateur b, qui la fait deſcendre au-deſſous de l'unité, mais ſe meſure par le Numerateur a, qui l'en approche, il faudra que ſi la Fraction $\frac{c}{d}$ décroît par le Denominateur bd, elle croiſſe auſſi ſelon la force du Numerateur a, & par conſequent elle aura pour Numerateur ac, & le Produit ſera $\frac{ac}{bd}$.

5. Si je multiplie $\frac{1}{d}$ par $\frac{1}{b}$, j'aurai 1. $\frac{1}{b}$ :: $\frac{1}{d}$ eſt au Produit que je cherche. Le Produit que je cherche ſera donc au-deſſous du Multiplié $\frac{1}{d}$, comme $\frac{1}{b}$ eſt au-deſſous de l'unité.

Or la Fraction $\frac{1}{b}$ eſt au-deſſous de l'unité à proportion que b tient la place d'un grand nombre. Il faudra donc que le Produit deſcende au-deſſous de $\frac{1}{d}$, ſuivant que b eſt grand en comparaiſon de l'unité ; & puiſque le Produit deſcendra au-deſſous de $\frac{1}{d}$ à proportion que ſon Denominateur croîtra par-deſſus le Denominateur d, il faudra qu'il croiſſe à proportion de la grandeur de b, & c'eſt ce qui arrive quand on change d en bd. On a donc 1. $\frac{1}{b}$ :: $\frac{1}{d}$. $\frac{1}{bd}$.

Si j'avois eu pour Multiplié $\frac{c}{d}$, j'aurois eu

1. $\frac{1}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{c}{db}$: ſi j'avois pour Multipliant $\frac{a}{b}$ & pour Multiplié $\frac{1}{d}$, j'aurois fait 1. $\frac{a}{b} :: \frac{1}{d} . \frac{a}{bd}$. Car $\frac{a}{bd}$ croît par-deſſus $\frac{1}{bd}$, comme a par-deſſus l'unité, & comme $\frac{a}{b}$ par deſſus $\frac{1}{b}$, car $\frac{a}{b} = \frac{1 \times a}{b}$. Donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

6. Je multiplie $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$; c'eſt-à-dire je prends $\frac{2}{3}$, non pas une fois, mais 3 quarts de fois. Pour cet effet, 1°. je prends $\frac{2}{3}$ un quart de fois, c'eſt-à-dire je le fais 4 fois moindre en quadruplant le Denominateur 3, & j'ai $\frac{2}{12}$. Mais 2°. je devois le prendre, non pas ſimplement un quart de fois, mais 3 quarts de fois, il faut donc tripler la Fraction $\frac{2}{12}$, ce que je fais en multipliant le Numerateur 2 par 3, & j'ai $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$: effectivement $\frac{2}{3}$, c'eſt $\frac{8}{12}$, le quart de $\frac{8}{12}$, c'eſt $\frac{2}{12}$, & les 3 quarts ſont $\frac{6}{12}$. Il eſt bon de ſe familiariſer ce raiſonnement, en l'appliquant dans cet ordre à pluſieurs Exemples.

Fraction de Fraction.

7. On voit par là que multiplier une Fraction par une autre, c'eſt chercher la Fraction d'une Fraction; multiplier, par exemple, $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, c'eſt chercher une Fraction qui vaille les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, &

Digitized by Google

cette Multiplication eſt équivalente à une Diviſion; c'eſt ici $\frac{6}{12}$ égal à une moitié.

Mais quand on a une Fraction, par exemple, $\frac{2}{3}$, à laquelle on veut ajoûter, non quelque entier ni une autre Fraction, mais une portion de cette même Fraction, comme par exemple, les $\frac{3}{4}$, on peut multiplier les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 4, & on aura $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Or il eſt viſible que $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} =$ aux $\frac{3}{4}$ de $\frac{8}{12}$. Or $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$.

On peut auſſi augmenter d'une unité la valeur de la minutie propoſée. Ici donc j'aurai $\frac{3}{4} + 1$, ou $\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$. Si la Fraction $\frac{2}{3}$ étoit équivalente à l'unité, la Queſtion ſeroit reſoluë; mais $\frac{7}{4}$ contient $\frac{3}{3} + \frac{3}{4}$ de $\frac{3}{3}$. Ma ſomme $\frac{7}{4}$ eſt donc trop grande d'un tiers d'unité, je ne dois donc avoir que les $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{4}$, & pour les avoir, je multiplie $\frac{2}{3}$ par $\frac{7}{4}$, & j'ai $\frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.

Quand il s'agit de Souſtraction. Pour ôter, par exemple, de $\frac{4}{5}$, la $\frac{1}{2} +$ les $\frac{2}{3}$ de ces $\frac{4}{5}$.

1°. Je fais $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$. Je dois donc ôter de

$\frac{4}{5}$ les $\frac{7}{6}$. Pour cet effet j'ôte $\frac{7}{6}$ de l'unité ou de $\frac{6}{6}$, reſte $-\frac{1}{6}$.

Si $\frac{4}{5}$ étoit $= \frac{6}{6} = 1$, la Queſtion ſeroit reſoluë. Mais comme je dois ſeulement avoir les $\frac{4}{5}$ de $-\frac{1}{6}$, je fais une Multiplication, & j'ai $-\frac{4}{30} = -\frac{2}{15}$ $= \frac{4}{5} - \frac{7}{6}$ de $\frac{4}{5}$.

8. $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$: car le Produit des extrêmes $=$ au Produit des Moïens. c & c ſont des portions égales ; a marque le nombre de fois que c eſt pris dans le premier, & b le nombre de fois que c eſt pris dans le ſecond. Fractions dont les Denominateurs ſont égaux.

$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: ad . bc$. Car $\frac{adc}{d} = \frac{abc}{b}$, & outre cela $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ & $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$. Or $\frac{ad}{bd} . \frac{bc}{bd} :: ad . bc$.

9. $\frac{b}{a} . \frac{b}{c} :: c . a$. Car le Produit $\frac{bc}{c} = \frac{ab}{a}$, puiſque l'un & l'autre eſt b, les ſommes a & c ſont priſes autant de fois l'une que l'autre. Donc la valeur de la plus grande Fraction ſur la moindre, dépend de la petiteſſe de ſon Denominateur, en comparaiſon du Denominateur de l'autre. Fractions dont les Numerateurs ſont égaux.

10. Pour diviſer b par c, on écrit $\frac{b}{c}$; car un Quotient vaut autant de fois l'unité, ou une certaine portion de l'unité, que le Diviſé contient de fois le Diviſeur, ou certaine portion du Diviſeur. Et une Fraction préciſément de même, vaut au-

Digitized by Google

tant d'unitez que le Numerateur contient de fois le Denominateur, ou elle approche de valoir l'unité, ſuivant que le Numerateur approche de contenir le Denominateur.

Diviſion. 10. Mais pour diviſer la Fraction $\frac{a}{b}$ par la Fraction $\frac{c}{d}$, 1°. je les réduits au même Denominateur, & j'ai pour le Diviſé la Fraction $\frac{ad}{bd}$, & pour le Diviſeur la Fraction $\frac{bc}{bd}$; cela étant je vois 2°. que diviſer la Fraction $\frac{ad}{bd}$ par la Fraction $\frac{bc}{bd}$, c'eſt préciſément diviſer le Numerateur ad par le Numerateur bc. Puiſque quand les Denominateurs ſont égaux, les Fractions ſont entr'elles comme leurs Numerateurs, & par conſequent la ſeconde eſt contenuë dans la premiere, comme le Numerateur bc eſt contenu dans le Numerateur ad. Or 3°. diviſer ad par bc, c'eſt avoir pour Quotient une Fraction dont ad, ſoit le Numerateur & bc le Denominateur; car dans une Diviſion le Quotient eſt à l'unité, comme le Diviſé au Diviſeur; & nous venons de voir dans le premier Article que l'unité eſt à la valeur de la Fraction, comme le Denominateur eſt au Numerateur, par conſequent *Invertendo* la valeur de la Fraction $\frac{ad}{bc}$ eſt à l'unité, comme le Diviſé ad, qui eſt ici Numerateur, au Diviſeur bc, qui eſt ici le Denominateur.

11. Je dois diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, 1°. m'étant déja aperçû que j'opere plus aiſément ſur les Fractions

quand elles ſont réduites aux mêmes Denominateurs, je commence par cette réduction, & j'ai $\frac{8}{12}$ à diviſer par $\frac{9}{12}$, or $\frac{8}{12}.\frac{9}{12}::8.9$.

De même donc que pour diviſer 8 piſtoles par 9 piſtoles, ou 8 écus par 9 écus, je diviſe 8 par 9, de même pour diviſer $\frac{8}{12}$ par $\frac{9}{12}$, je diviſe 8 par 9, ce qui me donne la Fraction $\frac{8}{9^e}$. Ainſi pour diviſer une Fraction par une autre, il faut 1°. réduire aux mêmes Denominateurs, 2°. tracer une 3e Fraction dont le Numerateur ſoit le Numerateur de la Fraction diviſée, & le Denominateur ſoit le Numerateur de la Fraction diviſante : ſi j'ai à diviſer $\frac{2}{7}$ par $\frac{3}{5}$, 1°. je les change en $\frac{10}{35}$ $\frac{21}{35}$, & j'ai pour Quotient $\frac{10}{21}$: ſi j'avois diviſé $\frac{3}{5}$ par $\frac{2}{7}$, j'aurois pour Quotient $\frac{21}{10}=2+\frac{1}{10}$.

12. Pour diviſer $\frac{a}{b}$ par c, je change c en $\frac{c}{1}$. Je réduis au même Denominateur, & j'ai $\frac{bc}{b}$, $\frac{a}{b}$. Je diviſe donc par $\frac{bc}{b}$, & j'ai pour Quotient $\frac{a}{bc}$.

En effet, le Quotient $\frac{a}{bc}\times c$ le Diviſeur, donne $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$, & 1. $\frac{a}{bc}$(Quotient) :: $c.\frac{a}{b}$, car derechef $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

Digitized by Google

Ainſi en diviſant une Fraction par un Entier, on a pour Quotient une Fraction, dont le Numerateur eſt le même que celui de la Fraction diviſée, & le Denominateur eſt le Produit du Denominateur de la Diviſée, multiplié par l'Entier diviſant.

Exemples plus compoſez.

13. Pour diviſer c par $\frac{a}{b}$, je fais $\frac{c}{1}$ diviſé par $\frac{a}{b}$, ou $\frac{bc}{b}$ diviſé par $\frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$; car $\frac{a}{b}$ eſt en $\frac{bc}{b}$, comme a eſt en bc. 1. $\frac{bc}{a}$ (Quotient) : : $\frac{a}{b}$. c. Car $\frac{abc}{ab} = c$.

De ſorte que quand on diviſe un Entier par une Fraction, on a pour Quotient une Fraction dont le Numerateur eſt le Produit de l'Entier multiplié par le Denominateur de la Fraction diviſante, & le Denominateur eſt le Numerateur même de la Fraction diviſante.

14. Quand je diviſe a par b, j'ai un Quotient q. Si je diviſe a par $\frac{b}{c}$, le Quotient q devra croître à proportion que $\frac{b}{c}$ eſt au-deſſous de b. Or il eſt au-deſſous de b à proportion que c eſt grand. Donc le Quotient q croîtra en raiſon de la Grandeur c, & ſera $q \times c$.

15. J'ai $a + b^2$. Je veux diviſer b^2 par $c + \frac{bc}{d}$. 1°. Je fais $c + \frac{bc}{d} = \frac{dc + bc}{d}$. 2°. Le Quotient de $\frac{b^2}{1}$ diviſé par $\frac{dc + bc}{d}$, eſt $\frac{db^2}{dc + bc}$. 3°. Pour y joindre a, je fais $\frac{adc + abc}{dc + bc} = a$.

Digitized by Google

4°. S'il avoit fallu diviſer encore cela par $b - \frac{c^2+b^3}{e}$, je ferois 5°. $\frac{be-c^2+b^3}{e}$.

6°. je réduirois aux mêmes Denominateurs avec $\frac{adc+abc+db^2}{ac+bc}$, & j'aurois pour Diviſé $\frac{adce+abce+edb^2}{dce+bce}$, & pour Diviſeur $\frac{bcde+bbce-dc^3-bc^3+dcb^3+cb^4}{dce+bce}$, & pour Quotient $\frac{adce+abce+edb^2}{bcde+bbce-dc^3-bc^3+dcb^3+cb^4}$.

16. Pour diviſer $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{c}$, 1°. Je fais $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ & $\frac{bb}{bc}=\frac{b}{c}$. 2°. Je diviſe $\frac{ac}{bc}$ par $\frac{bb}{bc}$. Abregé.

Or $\frac{bb}{bc}$ eſt en $\frac{ac}{bc}$ autant que bb eſt en ac. Donc $\frac{ac}{bb}$ eſt mon Quotient.

J'aurai le même Quotient ſi je renverſe les termes du Diviſeur, & que par ces termes ainſi renverſez je multiplie ceux du Diviſé qui leur répondront.

Il faut diviſer $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{c}$. 1°. Renverſez $\frac{b}{c}$ pour avoir $\frac{c}{b}$. 2°. Multipliez $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{b}$, vous aurez $\frac{ac}{bb}$.

On renverſe les termes du Diviſeur $\frac{b}{c}$, & on fait $\frac{c}{b}$, puis on multiplie par cette Fraction le Dividende $\frac{d}{f}$, & on aura $\frac{cd}{bf}$.

En effet, ſi je diviſe $\frac{d}{f}$ par b, j'abaiſſe dans

mon Quotient la valeur de $\frac{d}{f}$ à proportion que b eſt au-deſſus de l'unité.

C'eſt ce qui arrive quand je multiplie le Denominateur f par b. Car $\frac{d}{bf}$. $\frac{d}{f}$ :: f. bf :: 1. b.

Mais ſi au lieu de diviſer par b je diviſe par $\frac{b}{c}$ le ſecond Quotient devra croître par deſſus le 1r, à proportion que $\frac{b}{c}$ eſt au-deſſous de b. Or il eſt au-deſſous de b, à proportion que c contient d'unitez.

Donc je dois hauſſer la valeur $\frac{d}{bf}$, à proportion que c contient d'unitez; c'eſt ce que je fais en multipliant le Numerateur par c.

Preparations à obſerver.

17. Pour diviſer une Fraction par une autre, on a quelquefois beſoin de diverſes préparations.

Je veux diviſer $b + \frac{c + \frac{d}{e}}{f}$ par $g - \frac{b - \frac{k}{m}}{o + \frac{n}{p}}$

1°. Je fais $b = \frac{bf}{f}$.

2°. $c = \frac{ce}{e}$, & j'ai $b + \frac{c + \frac{d}{e}}{f} = \frac{bf + \frac{ce+d}{e}}{f}$

3°. Je fais $\frac{bfe}{e} = bf$, & j'ai $\frac{\frac{bfe+ce+d}{e}}{f}$

4°. Je diviſe $\frac{bfe+ce+d}{e}$ par $\frac{f}{1}$, & j'ai $\frac{bfe+ce+d}{ef}$; car en multipliant le Denominateur e par f, j'ai augmenté la valeur de la Fraction, à proportion de la Grandeur de f.

Digitized by Google

Je passe au Diviseur, & 1°. je fais $o + \frac{n}{p} = \frac{op+n}{p}$. 2°. $h - \frac{k}{m} = \frac{hm-k}{m}$. 3°. $g - \frac{hm-k}{m} = \frac{gm-hm-k}{m}$, & j'ai $\frac{\frac{gm-hm-k}{m}}{\frac{op+n}{p}}$

4°. Je divise $\frac{gm-hm-k}{m}$ par $\frac{op+n}{p}$, & j'ai $\frac{pgm-phm-pk}{opm+mn}$.

Enfin par cette Fraction je divise $\frac{bfe+ce+d}{ef}$, c'est-à-dire que j'ai $\frac{bfe+ce+d}{ef} \times \frac{opm+mn}{pgm-phm-pk}$.

18. Je veux une Fraction égale à $\frac{b}{c}$, qui ait pour Denominateur f: je fais $\frac{b}{c} = \frac{\frac{bf}{c}}{f}$, car $\frac{bf}{c}$ divisé par $\frac{f}{1} = \frac{bf}{cf} = \frac{b}{c}$. Donner à une Fraction le Denominateur qu'on veut.

Donc $\frac{b}{c} = \frac{\frac{bf}{c}}{f}$.

Or si $\frac{bf}{c} = d$, on aura $cd = bf$. Donc $\frac{bf}{cf} = \frac{b}{c} = \frac{dc}{cf} = \frac{d}{f}$.

19. Je change $\frac{2}{3}$ en 12es : j'ai $\frac{\frac{2 \times 12}{3}}{12} = \frac{2}{3}$, car c'est $\frac{\frac{24}{3}}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Digitized by Google

Si je change $\frac{2}{3}$ en 8es, j'aurai $\frac{\frac{2\times 8}{3}}{8} = \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{5+\frac{1}{3}}{8}$

Methode differente d'exprimer les Fractions.

20. Tous les Calculs qu'on fait ſur des Quantitez exprimées par des Lettres, ne conſiſtent, à parler exactement, que dans des arrangemens de certains Signes, qui viennent à découvrir à ceux qui connoiſſent l'uſage de ces Signes, de quelle maniere de certaines Quantitez doivent être exprimées, pour en découvrir enfin la valeur ou les rapports en Nombres ou en Lignes.

On ne ſe ſert pas toûjours des mêmes Signes pour marquer les mêmes rapports; mais dès qu'on a commencé par un certain genre, il faut continuer : on choiſit tantôt l'un, tantôt l'autre, ſuivant que l'un peut contribuer plûtôt que l'autre à rendre les Operations plus diſtinctes ou à les abreger.

21. Ainſi au lieu que $\frac{1}{a}$ ſignifie 1, diviſé par la quantité a, $\frac{b}{a}$ ſignifie b, diviſé par la quantité a. On deſignera le premier de ces rapports par a^{-1}, & le ſecond par ba^{-1}.

Pour multiplier $\frac{1}{a}$ par $\frac{b}{a}$, je fais $\frac{b}{aa}$, ſuivant la Méthode ordinaire.

Si je me ſers de la ſeconde, j'ajoûterai les expoſans $^{-1}$, & je dirai $a^{-1} + ba^{-1} = ba^{-2} = \frac{b}{aa}$.

Le Signe + marque des Entiers, & par conſequent ce qui eſt ſous ce Signe + répond au Numerateur.

Le Signe — marque des Fractions, & ce qui

Digitized by Google

eſt ſous ce Signe —, répond au Denominateur.

a^{+2}, ou Simplement a^2 deſignera aa pour le placer au Numerateur ; b^1, ou b de même : mais b^{-1} marqueroit b équivalent à un Denominateur de Fraction. a^{-2} marqueroit aa, répondant de même à un Denominateur. Ainſi $b^3a^{-1} = \frac{b^3}{a^1}$.

22. Mais ſi j'avois $\frac{b^2}{ac^{-3}}$. Comme $ac^{-3} = \frac{a}{c^3}$. $\frac{b^2}{ac^{-3}}$, c'eſt $\frac{b^2}{1}$ diviſé par $\frac{a}{c^3} = \frac{b^2}{1} \times \frac{c^3}{a} = \frac{b^2c^3}{a}$.

Il faut donc faire paſſer au Numerateur tout ce qui dans le Denominateur eſt affecté du Signe —, ou du Signe de Fraction, & comme la Diviſion défait ce que produit la Multiplication, quand je dois diviſer $\frac{b}{c}$ par $\frac{d}{f}$, & que j'exprime ainſi ces deux Fractions ; bc^{-1} à diviſer par df^{-1} : ſi j'écrivois $bdc^{-1}f^{-1} = \frac{bd}{cf}$, je multiplierois ; mais je dois avoir non $\frac{bd}{cf}$, mais $\frac{bf}{cd}$.

J'écris donc $bc^{-1} \times d^{-1}f^{+1} = \frac{bf}{cd}$. Je change les Signes, & $b = b^+$, comme $d = d^{+1}$.

Pour diviſer b^3c^{-4} par $b^5c^{-3} = \frac{b^3}{c^4}$, par $\frac{b^5}{c^3}$; j'écris $b^3c^{-4} \times b^{-5}c^{+3} = b^{-2}c^{-1} = \frac{1}{b^2c}$. Car le Numerateur b^3 doit demeurer Numerateur, de même que le Denominateur c^{-4}. Ainſi on ne change rien à leurs Signes. Mais le Numerateur b^5 doit devenir Denominateur, & par conſequent au lieu de $+5$, il doit avoir pour ſon expoſant -5. Le Denominateur c^{-3} doit devenir

Numerateur, & avoir pour expoſant $+1$; car les termes du Diviſeur ſe renverſent.

23. Et en general, $a^n b^n c^{-p} \times a^n b^n c^{-p+2} d^{-p} = \frac{a^n b^n}{c^p} \times \frac{a^n b^n}{c^{-p+2} d^p}$, donne

$$a^{n+n} b^{n+n} c^{-p-p+2} d^{-p} = \frac{a^{n+n} b^{2n}}{c^{-2p+2} d^p}.$$

Si on avoit diviſé on auroit eu $ab^n c^{-p} \times a^{-n} = b^{-n} c^{+p} + 2 d^{+p}$, ce qui donne $\frac{a^n b^n c^{p+2} d^p}{a^n b^n c^p} = \frac{a^n c^2 d^p}{a^n} = a^n a^{-n} d^p c^2$.

J'ai demontré les fondemens de cette Méthode de calculer avec leurs Conſequences dans le ſecond Diſcours Préliminaire ſur l'Analyſe des Infiniment Petits.

Reduire aux mêmes Denominateurs.

24. J'ai demontré dans mon Arithmetique la méthode de réduire des Fractions aux mêmes Denominateurs.

Si j'ai $\frac{a}{abc} \frac{b}{bcd} \frac{c}{acd}$, 1°. je les réduits $\frac{1}{bc} \frac{1}{cd} \frac{1}{ad}$.

2°. $\frac{1}{bc} = \frac{acdd}{abccdd}$, & $\frac{1}{cd} = \frac{abcd}{abccdd}$, & $\frac{1}{ad} = \frac{bccd}{abccdd}$.

Aux petits termes.

25. J'ai auſſi ſuffiſamment demontré la méthode de réduire à de plus petits termes. Elle eſt plus praticable en Lettres qu'en Chiffres.

Exemples. $\frac{48 a^3 b^5 dc}{36 aab^5 c} = \frac{4ad}{3}$, & $\frac{48 aab^5 c^3}{64 a^3 b^5 ccd} = \frac{3c}{4ad}$.

26. J'ai $ab + \frac{a^3 + 4abb}{aab} + \frac{aa - cc + d}{a+c}$.

1°. J'écris $ab + \frac{a^3}{aab} + \frac{4abb}{aab} + \frac{aa-cc}{a+c} + \frac{d}{a+c}$.

Ce partage facilitera l'Operation, & la rendra plus ſimple.

Digitized by Google

2°. Je corrige, & j'ai $\frac{ab}{1}+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+\frac{a-c}{1}+\frac{d}{a+c}$.

3°. Le Produit de tous les Denominateurs eſt $ba\times a+c=aab+abc$.

4°. Par ce Produit je multiplie tous les Numerateurs qui n'ont que l'unité au Denominateur, & j'ai $\frac{a^3bb+aabbc+a^3b\overset{+aabc}{-aabc}-abcc}{aab+abc}$.

5°. Je multiplie $\frac{a}{b}$ par $aa+ac$, & j'ai $\frac{a^3+aac}{aab+abc}$.

6°. Je multiplie $\frac{4b}{a}$ par $ab+bc$, & j'ai $\frac{4abb+4bbc}{aab+abc}$.

7°. Je multiplie $\frac{d}{a+c}$ par ab, & j'ai $\frac{abd}{aab+abc}$.

8°. Je fais une ſeule Fraction $\frac{a^3bb+aabbc+a^3b-abcc+a^3+aac+4abb+4bbc+abd}{aab+abc}$.

Cet exemple tient lieu de Regle, & preſente aux yeux ſa Demonſtration.

On peut énoncer une Proportion en Fractions.

17. Puiſque deux Fractions ſont d'égale valeur, quand les deux termes de la premiere ont entr'eux le même rapport que les deux termes de la ſeconde, il ſuit que de deux Fractions égales on peut faire une proportion, & que je puis toûjours exprimer un Rapport en Fraction. L'Antecedent ſera le Numerateur, & le Conſequent le Denominateur.

J'ai $\frac{b}{c}=\frac{d}{f}$. Donc $b.c::d.f$, & *Alternando* $b.d::c.f$, & par conſequent je peux conclure $\frac{b}{d}=\frac{c}{f}$. Je peux encore conclure $\frac{b+c}{d+f}=\frac{b}{d}$, car ſi $b.c::d.f$. *Convertendo* $b+c.b::d+f.d$.

Progreſſions Geometri-

28. Quand on a une Progreſſion Geometrique dont le premier terme eſt 1, & les ſuivans des Frac-

ques en Fractions.

tions qui vont toûjours en diminuant, la premiere de ces Fractions peut être regardée comme une Racine; la ſeconde ſera le Quarré de cette Racine; c'eſt-à-dire, le Denominateur de la ſeconde Fraction ſera le Quarré du Denominateur de la premiere; la 3e ſera dans le même ſens, le Cube de la premiere Fraction, & ainſi de ſuite, les Denominateurs de ces Fractions formeront une Progreſſion, de laquelle tous les termes contiendront par ordre les Puiſſances de la premiere Fraction, & on aura chaque terme d'une telle Progreſſion, en multipliant celui qui le precede par le ſecond qui eſt la premiere Fraction.

J'ai $1\ \frac{1}{a}\ \frac{1}{aa}\ \frac{1}{a^3}\ \frac{1}{a^4}$, je dis que ces cinq termes ſont une Progreſſion; car nous avons prouvé que les Puiſſances d'une même Racine ſont en progreſſion : or quand le Numerateur eſt toûjours le même, les Fractions décroiſſent dans la même proportion que les Denominateurs croiſſent, puiſque $1.\frac{1}{a}::a.1$, & que $1.\frac{1}{aa}::aa.1$, & par conſequent la Fraction $\frac{1}{a}$ ſurpaſſe en valeur la Fraction $\frac{1}{aa}$, ſuivant que a eſt moindre que aa.

Autrement $1.\frac{1}{a}::a.1$. Donc *Alternando* $1.a::\frac{1}{a}.1$. D'un autre côté, j'ai $1.\frac{1}{aa}::aa.1$, & *Alternando* $1.aa::\frac{1}{aa}.1$. Or la raiſon de $\frac{1}{aa}.1$, c'eſt la valeur de la ſeconde Fraction, & la raiſon de $\frac{1}{a}.1$, c'eſt la valeur de la premiere; ainſi

ſa

la valeur de la seconde, est à la valeur de la premiere, comme la raison de 1. aa est à la raison de 1. a. Or a est d'autant plus éloigné de valoir aa, pardessus ce que 1 est éloigné de valoir a, que aa est plus grand que a, & ainsi la valeur de la 2e Fraction est d'autant moindre que celle de la premiere, que aa est plus grand que a.

29. Que j'aïe quelque Numerateur que l'on voudra, pourvû que ce Numerateur soit le même dans toutes les Fractions, comme $\frac{3}{a}\ \frac{3}{aa}\ \frac{3}{a^3}$, &c. ces Fractions sont en progression, puisque les valeurs des Fractions diminuent à mesure que les Denominateurs croissent en progression; car étant égales par leurs Numerateurs, leur inégalité ne peut venir que de leurs Denominateurs.

Si j'ai la Progression $\dot{:}\dot{:}\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{4}{9}\ \frac{8}{27}\ \frac{16}{81}\ \frac{32}{243}$, je puis en faisant $3 = a$, conclure que $9 = aa$, $27 = a^3$, j'aurai donc à la place de cette Progression en nombres, celle-ci partie en nombres & partie en lettres $\dot{:}\dot{:}\ 1.\ \frac{2}{a}\ \frac{4}{aa}\ \frac{8}{a^3}\ \frac{16}{a^4}\ \frac{32}{a^5}$.

30. Puisque la valeur d'une Fraction dépend du Numerateur & du Denominateur, afin que des Fractions forment une Progression, il faut ou qu'elles aïent toutes le même Numerateur, alors les Denominateurs croîtront en progression de Puissances, comme nous venons de le voir, ou si elles different en Numerateurs, il faudra aussi que ces Numerateurs soient en progression; car autrement la valeur qui seroit en partie en progression, en partie non, ne seroit pas en progression. Si les Denominateurs sont les mêmes, il faudra que les Numerateurs soient en progression, & en appel-

Digitized by Google

lant le premier a, le ſecond ſera aa, le 3e a^3, &c. & l'on aura $* \div\div 1. \frac{a}{1} \frac{aa}{1} \frac{a^3}{1} \frac{a^4}{1}$, ou $\div\div 1. \frac{a}{4} \frac{aa}{4} \frac{a^3}{4} \frac{a^4}{4}$, mais en ce cas la Progreſſion iroit toûjours en croiſſant.

31. Et ſi dans une Progreſſion dont le premier terme eſt l'unité, les Numerateurs & les Denominateurs ſont differens, il eſt manifeſte que ſi les Numerateurs forment une ſuite de Puiſſances en progreſſion, & les Denominateurs une autre, les Fractions ſeront en progreſſion $\div\div 1. \frac{b}{c} \frac{bb}{cc} \frac{b^3}{c^3} \frac{b^4}{c^4}$. Cela ſe prouve en multipliant deux Fractions quelconques de cette Progreſſion, puis deux autres également éloignées de ces deux qu'on vient de multiplier; l'une du côté où la Progreſſion décroît, & l'autre où elle croît.

32. L'on peut avoir une ſuite de Fractions dont les Denominateurs formeront une Progreſſion; & par conſequent compoſeront une ſuite de Puiſſances du ſecond terme, en poſant l'unité pour le premier; c'eſt-à-dire, compoſeront une ſuite des puiſſances du premier Denominateur; mais les Fractions dont les Denominateurs ſeront ainſi rangez, pourront avoir toutes ſortes de Numerateurs.

Multiplication de ces Fractions.

33. Et puiſque en multipliant la ſeconde Puiſſance par la 3e, on a la 5e; en multipliant la ſeconde par la premiere, l'on a la 3^e; en multipliant la 5^e par la 7^e, l'on a la 12^e. Il s'enſuit que quand vous avez deux termes dans la Progreſſion dont je parle, pour ſavoir quel rang le Produit de ces deux termes doit tenir dans cette Progreſſion, il eſt viſible qu'il faut ajoûter en une ſomme les nombres qui indiquent les Puiſſances

Digitized by Google

que l'on vient de multiplier, & cette ſomme marquera le rang du Produit dans la Progreſſion.

34. Lorſque des Fractions dont les Denominateurs ſe ſuivent dans une telle Progreſſion, ont des Numerateurs differens de l'unité, puiſque pour multiplier ces Fractions, ſuivant la Méthode ordinaire, il faudroit 1°. multiplier Numerateur par Numerateur, 2°. Denominateur par Denominateur; il ſuffira de multiplier Numerateur par Numerateur, & de ſavoir quel rang le Denominateur doit tenir dans la Progreſſion.

J'ai pour Fractions $\frac{2}{a}\ \frac{3}{aa}\ \frac{5}{a^3}\ \frac{8}{a^4}\ \frac{4}{a^5}\ \frac{7}{a^6}\ \frac{2}{a^7}\ \frac{6}{a^8}\ \frac{3}{a^9}\ \frac{1}{a^{10}}$.

Si je veux multiplier la 3e par la 5e, il eſt manifeſte que le Denominateur ſera à la 8e place. Je n'aurai donc qu'à multiplier Numerateur par Numerateur, & j'aurai pour Produit une Fraction dont le Numerateur ſera 20, & le Denominateur ſera d'une valeur à occuper la 8e place de la Progreſſion.

Extraire la Racine Quarrée d'une Fraction.

35. Pour tirer la Racine Quarrée d'une Fraction quarrée, on tire celle du Numerateur, & elle ſera Numerateur du Quotient : on tire celle du Denominateur qui ſe place au Denominateur de la Racine.

$\frac{49}{36}$ a pour Racine $\frac{7}{6}$; car $\frac{7}{6} \times \frac{7}{6} = \frac{49}{36}$.

On peut auſſi multiplier 49 par 36, Numerateur par Denominateur, & on aura 1764, dont on extraira la Racine qui eſt 42.

On la diviſera par 36, & on aura $\frac{42}{36} = \frac{7}{6}$.

Demonſtration. J'ai $\frac{aa}{bb}$, ſa Racine eſt $\frac{a}{b}$.

Je multiplie *aa* par *bb*, & j'ai *aabb*, dont la

Racine eſt ab; je la diviſe par bb, & j'ai $\frac{ab}{bb} = \frac{a}{b}$.

aa deſigne également un Quarré quelconque qui ſoit un Numerateur, & bb a la même étenduë de ſignification dans le Denominateur.

Approximations.

36. Quand un nombre n'eſt pas quarré, pour en avoir une Racine plus approchante que celle qu'on trouve d'abord en entier, il faut y joindre quelque Fraction, & pour cet effet changer le Quarré en Fraction.

Je veux extraire la Racine de 42 : je ne trouve que 6 ; car 7 eſt la Racine de 49 : cependant 6×6, donne ſeulement 36.

Je remarque donc que $\frac{4200}{100} = \frac{42}{1} = 42$.

Je tire la Racine de 42|00 (64
36|
600
496
104

37. Je tire la Racine de 100 qui eſt 10, & j'ai $\frac{64}{10} = 6 + \frac{2}{5}$ pour Racine de $\frac{4200}{100} = 42$.

J'en aurai une plus approchée ſi je fais $\frac{42000000}{1000000} = \frac{42}{1}$.

Je tire la Racine du Numerateur, puis celle du Denominateur qui eſt 1000 ; & au lieu que la premiere Fraction ne donnoit que des dixiémes, celle-ci donnera des milliémes ; & par conſequent ne s'écartera de la veritable, ſi elle étoit poſſible, que de quelques milliémes.

38. 140 n'eſt pas cube, il excede 125 (Cube de 5) de 15.

Digitized by Google

Je change $\frac{140}{1}$ en $\frac{140000}{1000}$, parce que 1000 eſt Cube.

J'ai deux Colomnes dans la Racine, dont la 2e contient des dixiémes.

Si j'avois fait $\frac{140000000}{1000000} = \frac{140}{1}$, j'aurois trois Colomnes dans la Racine, & la 3e marqueroit des centiémes, parce que 1000000 eſt le Cube de 100.

39. Tout nombre ſe diviſe exactement par un autre, ou le Quotient de la Diviſion eſt compoſé d'un Entier & d'une Fraction diſtincte. Il n'en eſt pas ainſi dans les Grandeurs litterales. On peut pourtant approcher à l'infini d'un Quotient exact.

De la Diviſion des Grandeurs Litterales, quand elles donnent des Fractions.

Soit b qu'il faut diviſer par $a + c$.

1°. Je diviſe b par a, & j'ai pour Quotient $\frac{b}{a}$.

2°. Par ce Quotient je multiplie le Diviſeur $a + c$, & j'ai $\frac{ba + bc}{a} = b + \frac{bc}{a}$.

3°. Ce Produit je l'ôte du *Dividende*, reſte $b - b - \frac{bc}{a}$.

4°. Ce reſte $-\frac{bc}{a}$, je continuë à le diviſer par $a + c$; & pour cet effet je diviſe $-\frac{bc}{a}$ par a, & j'ai $-\frac{bc}{aa}$.

5°. Par ce Quotient je multiplie le Diviſeur $a + c$, & j'ai $-\frac{abc - bcc}{aa} = -\frac{bc}{a} - \frac{bcc}{aa}$.

Racine eſt ab; je la diviſe par bb, & j'ai $\frac{ab}{bb} = \frac{a}{b}$.

aa deſigne également un Quarré quelconque qui ſoit un Numerateur, & bb a la même étenduë de ſignification dans le Denominateur.

Approximations.

36. Quand un nombre n'eſt pas quarré, pour en avoir une Racine plus approchante que celle qu'on trouve d'abord en entier, il faut y joindre quelque Fraction, & pour cet effet changer le Quarré en Fraction.

Je veux extraire la Racine de 42 : je ne trouve que 6 ; car 7 eſt la Racine de 49 : cependant 6×6, donne ſeulement 36.

Je remarque donc que $\frac{4200}{100} = \frac{42}{1} = 42$.

Je tire la Racine de 42|00 (64
36|
600
496
104

37. Je tire la Racine de 100 qui eſt 10, & j'ai $\frac{64}{10} = 6 + \frac{2}{5}$ pour Racine de $\frac{4200}{100} = 42$.

J'en aurai une plus approchée ſi je fais $\frac{42000000}{1000000} = \frac{42}{1}$.

Je tire la Racine du Numerateur, puis celle du Denominateur qui eſt 1000 ; & au lieu que la premiere Fraction ne donnoit que des dixiémes, celle-ci donnera des milliémes ; & par conſequent ne s'écartera de la veritable, ſi elle étoit poſſible, que de quelques milliémes.

38. 140 n'eſt pas cube, il excede 125 (Cube de 5) de 15.

Digitized by Google

Je change $\frac{140}{1}$ en $\frac{140000}{1000}$, parce que 1000 eſt Cube.

J'ai deux Colomnes dans la Racine, dont la 2e contient des dixiémes.

Si j'avois fait $\frac{140000000}{1000000} = \frac{140}{1}$, j'aurois trois Colomnes dans la Racine, & la 3e marqueroit des centiémes, parce que 1000000 eſt le Cube de 100.

39. Tout nombre ſe diviſe exactement par un autre, ou le Quotient de la Diviſion eſt compoſé d'un Entier & d'une Fraction diſtincte. Il n'en eſt pas ainſi dans les Grandeurs litterales. On peut pourtant approcher à l'infini d'un Quotient exact.

De la Diviſion des Grandeurs Litterales, quand elles donnent des Fractions.

Soit b qu'il faut diviſer par $a + c$.

1°. Je diviſe b par a, & j'ai pour Quotient $\frac{b}{a}$.

2°. Par ce Quotient je multiplie le Diviſeur $a + c$, & j'ai $\frac{ba + bc}{a} = b + \frac{bc}{a}$.

3°. Ce Produit je l'ôte du *Dividende*, reſte $b - b - \frac{bc}{a}$.

4°. Ce reſte $-\frac{bc}{a}$, je continuë à le diviſer par $a + c$; & pour cet effet je diviſe $-\frac{bc}{a}$ par a, & j'ai $-\frac{bc}{aa}$.

5°. Par ce Quotient je multiplie le Diviſeur $a + c$, & j'ai $-\frac{abc - bcc}{aa} = -\frac{bc}{a} - \frac{bcc}{aa}$.

6°. Je l'ôte du Dividende, & j'ai $-\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}+\frac{bcc}{aa}$.

7°. Le reſte $\frac{bcc}{aa}$, je continuë à le diviſer par $a+c$, & j'ai $\frac{bcc}{a^3}$.

8°. Par ce Quotient je multiplie le Diviſeur, & j'ai $\frac{abcc}{a^3}+\frac{bc^3}{a^3}=\frac{bcc}{aa}+\frac{bc^3}{a^3}$.

9°. J'ôte du Dividende, & il me reſte $-\frac{bc^3}{a^3}$.

10°. Je continuë, & j'ai pour quatriéme Quotient $-\frac{bc^3}{a^4}$, & pour reſte $+\frac{bc^4}{a^4}$.

Voila déja pour Quotient $\frac{b}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bcc}{a^3}-\frac{bc^3}{a^4}$.

Cela ſe pouſſe à l'infini.

On a donc 1°. le premier terme du Diviſeur pour Denominateur.

2°. Une Fraction dont le Numerateur eſt le produit du Dividende par le ſecond terme du Diviſeur, & le Denominateur le Quarré du premier terme du Diviſeur.

3°. Dès-là on a toûjours au Numerateur le Dividende, multiplié ſucceſſivement par la Puiſſance du ſecond terme, & au Denominateur les Puiſſances du premier terme.

Si $b=1$. $a=2$. $c=1$, on a b diviſé par $a+c=\frac{1}{3}$, & au Quotient $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{10}{16}-\frac{5}{16}=\frac{5}{16}$. C'eſt trop peu; car j'ai $\frac{5}{16}$, au lieu de $\frac{5}{15}$.

Digitized by Google

D'abord j'avois eu $\frac{1}{2}$, au lieu de $\frac{1}{3}$, c'étoit trop; puis j'ai $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{3}$, c'eſt trop peu. 3°. $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$, au lieu de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, c'eſt trop; puis $\frac{5}{16}$ au lieu de $\frac{5}{15}$, c'eſt trop peu. Il ſe manquoit 1°. $\frac{1}{6}$, 2°. $\frac{1}{12}$, 3°. $\frac{1}{24}$, 4°. $\frac{1}{48}$, que le compte ne fût juſte.

Si $b = 2$. $a = 4$. $c = 3$.

On aura $\frac{2}{4} - \frac{6}{16} + \frac{18}{64} - \frac{54}{256} = \frac{128}{256} - \frac{96}{256} + \frac{72}{256} - \frac{54}{256}$.

Le Quotient $\frac{128}{256} - \frac{96}{256}$ n'étoit pas juſte, & il y auroit un mécompte de $\frac{9}{56} = \frac{36}{224}$.

Le Quotient $\frac{128}{256} - \frac{96}{256} + \frac{72}{256}$ n'eſt pas juſte non plus, & le mécompte eſt de $\frac{27}{224}$, moindre de $\frac{9}{224}$ que le précedent.

Il faudra donc ôter ces $\frac{27}{224}$. Au lieu de les ôter, on ôte $\frac{54}{256}$.

On ôte donc trop dans la proportion de 448 à 256, ou de 7 à 4.

Le mécompte immediatement précedent étoit de $\frac{36}{224} = \frac{9}{56}$.

Digitized by Google

Il eſt à preſent $\frac{27}{224}$, & par conſequent de $\frac{9}{224}$ moindre que le mécompte immediatement précedent.

Au lieu d'ôter ces $\frac{27}{224} = \frac{6912}{57344}$, j'ôte $\frac{54}{256} = \frac{12096}{57344}$, j'ôte donc de trop $\frac{81}{896}$.

Le mécompte immediatement précedent étoit de $\frac{27}{224} = \frac{108}{896}$, il eſt preſentement de $\frac{81}{896}$; il eſt donc moindre de $\frac{27}{896}$.

On devroit avoir $\frac{b}{a+c} = \frac{2}{7}$. Or $\frac{128}{256} = \frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ eſt plus grand que $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ de $\frac{3}{14}$. Il faudroit les ôter; mais on ôte $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. On ôte donc $\frac{42}{112} = \frac{3}{8}$ au lieu de $\frac{24}{112} = \frac{3}{14}$. Par conſequent on ôte de trop $\frac{18}{112} = \frac{9}{56}$.

L'excès étoit d'abord de $\frac{3}{14} = \frac{12}{56}$. Si donc $\frac{6}{16} = \frac{96}{256}$ avoit été égal à $\frac{12}{56} = \frac{3}{14}$, on auroit préciſément ôté ce qu'on avoit d'abord mis de trop: mais en ôtant $\frac{6}{16} = \frac{96}{256} = \frac{42}{112} = \frac{21}{56}$, au lieu de $\frac{12}{56} = \frac{3}{14}$, on ôte $\frac{21}{56}$. On ôte donc de trop $\frac{9}{56}$.

D'abord le compte n'étoit pas juſte par $\frac{12}{56}$ d'excès; enſuite il n'eſt pas juſte par $\frac{9}{56}$ de défaut.

Digitized by Google

Il approche donc de $\frac{3}{56}$ d'être plus juſte qu'auparavant.

Ces $\frac{9}{56}$ de défaut il faudroit les ajoûter.

Si $\frac{18}{64} = \frac{9}{32}$ étoit égal à $\frac{9}{56}$, le Quotient ſeroit juſte. Mais $\frac{18}{64} = \frac{9}{32} = \frac{504}{1792}$ & $\frac{9}{56} = \frac{288}{1792}$. Je remets donc de trop $\frac{216}{1792} = \frac{27}{224}$.

Le dernier mécompte eſt de $\frac{81}{896}$.

La ſomme du Quotient qui eſt égale à $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{9}{32} - \frac{27}{128}$, ſe réduit à $\frac{25}{128}$. Or ſi à $\frac{25}{128} = \frac{175}{896}$, on ajoûte le dernier mécompte $\frac{81}{896}$, on aura $\frac{256}{896} = \frac{2}{7}$.

Si $b = 4$. $a = 3$. $c = 2$. Après avoir réduit aux mêmes Denominateurs $\frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \frac{16}{27} - \frac{32}{81}$, on aura $\frac{108}{81} - \frac{72}{81} + \frac{48}{81} - \frac{32}{81}$, où les Numerateurs décroiſſent auſſi toûjours.

40. J'ai voulu donner une idée de cette Approximation qui ſe fait en Lettres, & la rendre ſenſible par des Exemples en nombre. Remarque.

J'avouë qu'elle eſt ingenieuſe; mais je ne tombe pas également d'accord de ſon utilité. Si les Grandeurs exprimées par b & par $a + c$, me ſont connuës, ſoit en Nombres, ſoit en Signes, je n'ai que faire d'Approximation.

Digitized by Google

Si elles me ſont inconnuës les Approximations qui ſont compoſées de leurs Puiſſances, ne me les feront par connoître. Au contraire, plus j'entaſſerai de termes, moins je verrai clair dans une Grandeur ainſi exprimée par des Signes très-combinez & inconnus.

Remarques ſur la Regle de Proportion en Fractions.

41. Quand on a trois termes, pour leur trouver un 4e proportionnel, l'on multiplie le ſecond par le 3e, & de ce Produit l'on fait le Numerateur d'une Fraction, à laquelle on donne pour Denominateur le premier terme, & cette Fraction, c'eſt la valeur du 4e proportionnel que l'on cherchoit.

Il ſuit de là que quand on a une Fraction, on peut la décompoſer de telle maniere que le Denominateur ſoit le premier terme, & les deux Racines du Numerateur, les deux autres d'une Proportion.

Toute la difficulté de cette Operation conſiſte à reſoudre le Numerateur en ſes deux Racines.

Cela ſe fait ſans embaras, lorſque ce Numerateur eſt une Grandeur incomplexe : Mais ſi c'eſt une Grandeur complexe ; c'eſt-à-dire un aſſemblage de Produits liez entr'eux par les Signes + & —, il faudra chercher un Diviſeur exact d'un tel Numerateur. $bb - cc$ ſe diviſe par $b + c$. $bb + bc$ par b.

Mais ſi l'on a $bb + cc$, il ſera neceſſaire de réduire l'un de ces termes en un équivalent, & de venir à bout par ce changement de trouver une ſomme qui ait un Diviſeur exact.

Pour cet effet on cherchera un 3e Proportionnel à b & à c, & l'on fera $\div\div b. c. \frac{cc}{b}$.

Cette Fraction $\frac{cc}{b}$, on l'appellera d, & l'on aura $\div\div b. c. d$; par conſequent $cc = bd$, & $bb + cc$

$= bb + bd$, dont une des Racines eſt b, & l'autre $b + d$.

Si l'on a $bc + df$, il faudra changer le ſecond Produit df en un autre équivalent, où l'une des deux Lettres qui compoſe le premier ſe rencontre.

Pour cet effet l'on cherchera une 4e proportionele aux trois quantitez $b.\ d.\ f$, l'on fera comme $b.\ d :: f.\ \frac{fd}{b} = g$.

L'on aura donc $bg = df$, & la ſomme $bc + df = bc + bg$, qui a pour l'une de ſes Racines b, & pour l'autre $c + g$.

Si l'on a la Fraction $\frac{b^3}{cc}$, en la décompoſant l'on auroit $cc.\ b :: bb.\ \frac{b^3}{cc}$. Mais ſi l'on ſouhaite que la Proportion ſoit compoſée de Grandeurs Homogénes, il faudra changer le Denominateur cc en Produit équivalent qui ait pour une de ſes Racines une quantité marquée par la Lettre b.

Pour cet effet on fera $\div\div b.\ c.\ \frac{cc}{b} = d$, & l'on aura $cc = bd$; par conſequent la Fraction $\frac{b^3}{cc} = \frac{b^3}{bd} = \frac{bb}{d}$, laquelle Fraction ſe décompoſe pour produire cette Proportion $d.\ b :: b.\ \frac{bb}{d}$. De même ſi l'on avoit $\frac{bcc}{df}$, l'on feroit $b.\ d :: f.\ \frac{df}{b} = g$, & l'on auroit $bg = df$, par conſequent la Fraction $\frac{bcc}{df} = \frac{bcc}{bg} = \frac{cc}{g}$.

Si l'on a $\frac{c^4}{bb}$, l'on fera $b.\ c :: c.\ \frac{cc}{b} = d$, & l'on

aura $bd = ce$, par conſequent $bbdd = c^4$ & la Fraction $\frac{c^4}{bb} = \frac{bbdd}{bb} = dd$.

Si l'on a $\frac{c^3 b^3}{d^3}$, l'on fera $d. c :: b. \frac{bc}{d} = f$, par conſequent $df = cb$ & $d^3 f^3 = c^3 b^3$, & $\frac{c^3 b^3}{d^3} = \frac{d^3 f^3}{d^3} = f^3$.

Si l'on a $\frac{cbb}{d}$, l'on fera $d. b :: b. \frac{bb}{d} = f$, par conſequent $df = bb$ & $cbb = cdf$, & la Fraction $\frac{cbb}{d} = \frac{cdf}{d} = cf$.

Et ſi l'on fait $\sqrt[3]{cf} = g$, l'on aura $cf = gg$.

CHAPITRE XV.

Des Incommenſurables.

Origine des Incommenſurables.

1. ON a ſouvent beſoin de quarrer des Grandeurs, & d'en tirer la Racine pour découvrir certaines proportions ; & comme l'on ne peut extraire au juſte les Racines de toutes ſortes de Grandeurs, ces Racines, que l'on ne peut exprimer en nombres, ont donné lieu aux Incommenſurables, & on les appelle ainſi, parce qu'on ne peut les meſurer comme on meſure les nombres. On aura, par exemple, beſoin de trouver un *Moïen Proportionnel* entre 2 & 3, ce Moïen Proportionnel je l'appelle z, & j'ai la Progreſſion $\div$ 2, z, 3. Il ſuit de là, & de ce que nous avons établi en parlant des Progreſſions, que $zz = 6$, & que par conſequent z eſt égal à la Racine quarrée de 6, ce que l'on exprime ainſi $z = \sqrt{6}$. Or cette

$\sqrt{6}$ on la cherche inutilement, le nombre 6, comme nous le prouverons dans la ſuite, n'eſt pas un nombre qu'aucun autre puiſſe produire en ſe multipliant lui-même; ainſi cette $\sqrt{6}$, vraie ou prétenduë, (ce que nous éclaircirons ci-après) ne peut s'exprimer en nombres, & par conſequent ne peut ſe meſurer exactement comme les nombres par des unitez, ou par des portions d'unitez réïterées.

Approximation des Racines en Nombres.

2. Lorſque j'ai un nombre, comme par exemple, 42, tel qu'aucun nombre entier, multiplié par lui-même, ne le peut produire au juſte, après en avoir tiré la Racine la plus approchante qui eſt ici 6, il reſte quelque choſe, & plus ce reſte ſera petit, plus la Racine trouvée approchera de la veritable.

3. Pour faire cette Approximation, il faut changer le nombre entier, qui eſt ici 42, en une Fraction équivalente, dont le Denominateur ſoit un Quarré : ainſi donc au lieu de $\frac{42}{1}$, j'aurai $\frac{4200}{100}$; je tirerai ſa Racine la plus approchante de $\frac{4200}{100}$, & cette Racine contiendra des dixiémes, & ſera plus grande que la précedente Racine, tirée ſimplement de 42, ſavoir de $\frac{4}{10}$.

4. Si j'en ſouhaite encore une plus grande & plus approchante, au lieu du Denominateur 100, je quarre le Denominateur, & j'ai 10000, il faudra donc pour ne rien changer dans la valeur du faux Quarré 42, lui ajoûter 4 zeros pour avoir la Fraction 420000, de laquelle il faudra extraire la Racine Quarrée qui ſera plus grande que la précedente de $\frac{8}{100}$, & cette Racine contiendra des centiémes.

Digitized by Google

Je pouſſe l'approximation en cherchant la Racine de la Fraction $\frac{42000000}{1000000}$, de laquelle le Denominateur eſt le Quarré de 1000. Le Numerateur de ce Quarré renfermant 4 tranches, aura une Racine de 4 Colomnes, mais cette Operation ne me faiſant trouver que 6480, & $\frac{6480}{1000}$ égalant $\frac{648}{100}$, je n'ai point avancé l'approximation; j'ajoûte donc 2 zeros au Numerateur, & je trouve que la Racine approchée de $\frac{4200000000}{100000000}$, eſt $\frac{64806}{10000}$, plus grande que $\frac{648}{100}$ de $\frac{6}{10000}$, car $\frac{64800}{10000}$ égalent $\frac{648}{100}$.

5. Pour avoir la Racine Cube de 42, je tire celle de $\frac{42000}{1000}$ qui contient des dixiémes, car $\frac{42000}{1000} = \frac{42}{1}$, & j'ai $\frac{34}{10}$, plus grand que 3 de $\frac{4}{10}$.

6. Si j'en veux avoir une plus approchante, il faudra cuber 100, & j'aurai la Fraction $\frac{42000000}{1000000}$, de laquelle la Racine Cube contiendra des centaines, elle ſera de $\frac{348}{100}$, plus grande que $\frac{34}{10}$ de $\frac{8}{100}$.

7. Par cette Méthode l'on approche toûjours, mais il reſte toûjours quelque choſe; & il eſt même impoſſible qu'aucune Fraction, multipliée par elle-même, produiſe un nombre entier, à moins que cette Fraction elle-même ne valût exactement un Entier, comme ſont celles où le Numerateur contient préciſément une ou pluſieurs fois le De-

Digitized by Google

nominateur ; car celles-ci peuvent ſe changer en un nombre entier, & en ont la valeur.

8. Quand on cherche la Racine d'un Quarré ou d'un Cube, exprimé en nombres, & que l'approximation donne en Fractions une valeur toûjours plus approchante d'être la juſte, ce calcul donne ſans contredit une idée toûjours plus exacte & plus diſtincte de cette Racine qu'on cherche. Reflexions ſur les Approximations Litterales.

Il n'en eſt pas de même d'une approximation en Lettres : on a trouvé la Méthode de la pouſſer auſſi à l'infini ; mais il eſt certain que plus on la pouſſe, moins on voit clair. On ſait que les Signes ſont bien agencez, & que l'Operation eſt juſte, mais on ne ſe trouve aucune idée de ce qu'ils ſignifient.

Si les Quantitez ſur leſquelles roule ce calcul d'approximation par des ſuites qui peuvent aller à l'infini, ſont inconnuës, les tenebres croiſſent avec la ſuite qui renferme toûjours une plus grande combinaiſon de Grandeurs inconnuës.

Si les Grandeurs ſont connuës, on peut les exprimer en nombres ou en Lignes, & dès-là cette approximation par des ſuites de Lettres à l'infini devient ſuperfluë.

Les Puiſſances & leurs Racines marquent de certains rapports ; & comme on peut avoir des Lignes qui aïent entre-elles les rapports des Puiſſances Incommenſurables, & les rapports de leurs Racines, c'eſt ces Lignes qu'il faut chercher, & plus une ſuite eſt compoſée, plus il ſera difficile de ſe former l'idée d'une Ligne qui y réponde, & beaucoup plus de la tracer.

De ſorte qu'il n'y a aucune proportion entre l'utilité de cette Méthode & ce qu'elle a d'ingenieux pour l'invention, & de penible dans l'execution.

Digitized by Google

Aucune veritable Fraction, & proprement ainſi nommée, ne peut produire un Entier en ſe multipliant elle-même.

9. Que $\frac{b}{c}$ ſoit une Fraction réduite à ſes plus petits termes, je dis que la Fraction $\frac{bb}{cc}$ ne peut égaler exactement un nombre entier; car il faudroit ou que cc fût égal à bb, (ce qui ne ſe peut, parce que b & c ne ſont pas égaux) ou que cc ſe trouvât pluſieurs fois préciſément en bb, ce qui ne ſe peut non plus, s'il eſt vrai que b ſoit plus petit que c.

10. Mais ſi l'on veut que b ſoit plus grand que c, alors cette Fraction $\frac{b}{c}$ vaudra quelque entier & un reſte; faiſons-la donc 1°. équivalente à $d + \frac{f}{g}$ & le Quarré $\frac{bb}{cc} = dd + \frac{2df}{g} + \frac{ff}{gg}$: il a déja été prouvé que $\frac{ff}{gg}$ ne peut pas valoir un entier; car après avoir ſéparé les entiers, il reſte une Fraction dont le Numerateur eſt plus petit que le Denominateur. Or 1°. la partie dd eſt un entier, 2°. ſi la Fraction $\frac{2df}{g}$ égale encore quelque entier, il eſt évident que le Quarré total n'égalera pas un entier à cauſe de ſa partie $\frac{ff}{gg}$.

11. Il ne reſte plus qu'à s'aſſurer ſi peut être la Fraction $\frac{ff}{gg}$ ajoûtée à la Fraction $\frac{2df}{g}$, n'acheveroit pas un nombre entier. Pour cet effet il faudroit que $\frac{ff}{gg}$ égalât $\frac{1}{g}$ ou pluſieurs g; parce qu'il ſe manque préciſément un ou pluſieurs g, que $\frac{2df}{g}$ n'égale un entier. Or afin que la Fraction $\frac{ff}{gg}$ fut

fût égale à $\frac{1}{g}$, ou bien à une Fraction qui valût plusieurs g, & que nous appellerons $\frac{x}{g}$, il faudroit 1°. diviser $\frac{ff}{gg}$ par le même nombre, & que ff divisé par ce nombre eût pour Quotient x: Il faudroit 2°. qu'en divisant le Denominateur gg l'on eût pour Quotient g, ce qui ne se peut faire à moins que g ne soit aussi le Diviseur, & par consequent 3°. il faudroit que ff se divisât aussi par g, & je m'en vais prouver que cela ne se peut.

12. Comme x peut être mis en la place de 1, ou de quelque autre nombre que ce soit, $\frac{x}{g}$ marque une Fraction dont g est le Denominateur, & qui a pour Numerateur quel nombre que l'on voudra; ainsi la Demonstration que nous ferons sur x, sera applicable à tous les Numerateurs qui écheront.

Il est impossible que $\frac{ff}{gg} = \frac{x}{g}$, à moins que le Quotient de $\frac{ff}{g}$ ne soit x; car pour ne point changer la valeur d'une Fraction, il faut diviser les deux termes par le même.

Si $\frac{ff}{g} = x$, il suit que $xg = ff$. Donc 1°. on aura $x.f::f.g$, & par consequent la Fraction $\frac{x}{f} = \frac{f}{g}$. 2°. Puisque dans la Proportion $f.g::x.f$, f est plus petit que g; x sera aussi plus petit que f, de sorte que la Fraction $\frac{x}{f}$ seroit exprimée en

termes plus petits que ſon égale $\frac{f}{g}$, laquelle on ſuppoſoit pourtant réduite à ſes plus petits termes.

13. La précedente Demonſtration eſt fondée ſur la ſuppoſition que la Fraction $\frac{f}{g}$, réſidu de l'entier, eſt exprimée en ſes plus petits termes; ſi donc on s'oppiniâtroit, & que l'on ſoupçonnât que la Demonſtration ne pourroit pas s'étendre ſur les cas où la Fraction reſtante ſeroit exprimée en de grands termes : Pour rendre ma Demonſtration univerſelle, je fais retomber ce ſecond cas dans le précedent; car que $\frac{f}{t}$ ſoit la Fraction reſtante exprimée en plus grands termes que ſon égale $\frac{f}{g}$, je dois prouver que ſi $\frac{c}{b} = d + \frac{f}{t}$, le Quarré $\frac{cc}{bb} = dd + + \frac{2df}{t} + \frac{ff}{tt}$ ne vaut pas préciſément un entier; car il faudroit pour cela que les deux Fractions $\frac{2df}{t} + \frac{ff}{tt}$ jointes enſemble formaſſent un nombre entier; mais ſi cela étoit leurs égales $\frac{2df}{g} + + \frac{ff}{gg}$ formeroient auſſi un entier; & cela étant $\frac{ff}{gg}$ ſeroit égale à $\frac{x}{g}$, & l'on retomberoit dans la Demonſtration à l'impoſſible déja faite.

14. On peut auſſi prouver d'une autre maniere que ſi une Fraction $\frac{b}{c}$ n'eſt pas égale à un nombre entier; c'eſt-à-dire, ſi ſon Denominateur n'eſt pas contenu préciſément un certain nombre de fois

Digitized by Google

dans ſon Numerateur, en la multipliant par elle-même, on aura à la verité une Fraction dont les termes ſeront des Quarrez, & qui, à cet égard, pourra être appellée *Quarrée*; mais qui n'égalera point un Nombre Entier, c'eſt-à-dire, que l'on aura une Fraction dont le Denominateur ne ſera pas contenu pluſieurs fois préciſément dans ſon Numerateur.

Si cette Fraction $\frac{b}{c}$ n'eſt pas réduite à ſes plus petits Termes, qu'on la réduiſe, & que $\frac{b}{c}$ ſoit $=$ $=\frac{d}{f}$; en ſorte que d & f ſoient *Premiers entr'eux* & n'aïent point de *Diviſeur Commun* que l'Unité, je dis que leurs Quarrez dd & ff n'auront non plus point de Diviſeur Commun que l'Unité.

1°. Puiſque d eſt *Premier* avec f, je dis que dd ſera *Premier* avec f; car ſi dd & f avoient un Diviſeur commun g; ſoit $\frac{dd}{g}=m$, on aura $gm=dd$. Donc $g.d::d.m$. Donc $\frac{d}{g}=\frac{m}{d}$.

2°. Dans la Fraction $\frac{d}{g}$, puiſque le Numerateur d eſt *Premier* à l'égard de f, il ſera auſſi *Premier* à l'égard de g, qu'on ſuppoſe Diviſeur de f comme de dd.

Car ſi $\frac{g}{d}=p$, & que p fût un Entier, f égal à pluſieurs g, ſeroit auſſi égal à pluſieurs pd, & par conſequent à pluſieurs d. On auroit $pd=g$.

Or ſi g diviſoit f, on auroit $\frac{f}{g}$ n. Donc $ng=f$. Donc $f=pdn$. Or d diviſe pdn. Donc

d diviſeroit f, contre la ſouppoſition.

Mais 3°. ſi d & g ſont *Premiers* entr'eux, $\frac{d}{g}$ eſt exprimée en plus petits Termes que ſon égale $\frac{m}{d}$.

Donc m & d ne ſont pas *Premiers* entr'eux.

Donc, pour changer $\frac{a}{g}$ en $\frac{ap}{d}$, on multiplie d & g par le même Nombre.

Donc g eſt contenu en d, comme d en m.

g ſeroit donc Diviſeur de d, & $\frac{d}{g}$ ne ſeroit pas réduit à ſes plus petits Termes.

Par un raiſonnement ſemblable, je prouverai que d eſt premier avec ff. Or ſi ff eſt premier avec d, il ſera premier avec dd, par la même raiſon que d étant premier avec f, eſt auſſi premier avec ff.

Cela s'étend à l'infini; car ſi d & dd ſont premiers avec ff, ff ſera premier avec d^3, & ſi dd & d ſont premiers avec f & avec ff, il ſera premier avec f^3, & ſi f^3 eſt premier avec d & dd, il ſera premier avec d^3. Et en general, ſi $\frac{a}{b}$ eſt exprimée en ſes plus petits Termes, $\frac{a^m}{b^m}$ ſeront premiers entr'eux.

On peut pouſſer ce raiſonnement ſi loin qu'on voudra, & dire: Si $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ ſont Premiers entr'eux; c'eſt à dire, n'ont point de Diviſeur commun que l'Unité, f ne diviſe aucune des Puiſſances de a ni de b, &c. Donc $a.\ b$ ſeront Premiers à l'égard de f. Donc $a^n\ b^r$ ne ſe diviſe pas exactement par f; & en general $a^m\ b^r\ c\ d^t$ ne ſe diviſera pas exactement par f.

Digitized by Google

15. Quand je veux chercher une Moïenne Proportionnelle entre 2 & 18, je multiplie 2 par 18, & du Produit 36, je tire la Racine Quarrée, & j'ai la Progreſſion ∴ 2. 6. 18, dans laquelle le Quarré du Terme Moïen eſt égal au Plan des deux Extrêmes. Mais ſi j'avois cherché une Moïenne Proportionnelle entre 2 & 5, comme le Produit 10 n'a pas de Racine Quarrée, la Moïenne Proportionnelle ne peut s'exprimer en Nombre; c'eſt un *Incommenſurable*, & j'ai la Progreſſion ∴ 2. $\sqrt{10}$. 5. Moïenne Proportionnelle.

Or toutes les fois que j'ai deux Nombres, leſquels j'appellerai le premier b, le ſecond d, afin que leur Produit bd ſe trouve un vrai Quarré, & que par conſequent la Moïenne Proportionnelle c ſoit une vraie Racine, & les trois Termes Commenſurables; afin, dis-je, que cela ait lieu, il faut que b ſoit à d, comme Quarré en Nombre à Quarré en Nombre.

Demonſtration. J'ai deux Termes 75 & 192, entre leſquels il faut chercher un Moïen Proportionnel. Pour m'aſſurer d'abord ſi ce Moïen Proportionnel eſt poſſible, je cherche ſi la Raiſon de 75 à 192 pourra s'exprimer par des plus petits Termes qui ſoient des Quarrez. Pour cet effet, je fais de cette Raiſon une Fraction $\frac{75}{192}$, dont le Commun Diviſeur eſt 3, par lequel diviſant, j'ai $\frac{7}{192} = \frac{25}{64}$; d'où je conclus que le Moïen Proportionnel ſe trouvera en Nombre. J'opere donc, & je trouve la Progreſſion ∴ 75. 120. 192, où le Quarré du Terme Moïen 120 eſt 14400, le même que le Produit des deux Extrêmes.

16. J'ai deux Nombres; ſavoir b & d; mais ces

Digitized by Google

deux Nombres ne ſont pas entr'eux comme Quarré à Quarré : je dis que le Moïen Proportionnel ne pourra pas s'exprimer en Nombres, & que par conſequent l'on aura la Progreſſion ∴ $b. \sqrt{bd}. d$, où le Terme Moïen eſt un Incommenſurable.

Demonſtration. Appellons le Moïen Terme c ; je dis que c ne pourra s'exprimer en Nombres ; car dans la Progreſſion ∴ $b. c. d$, $b. d :: bb. cc$. Or ſi c étoit un Nombre, cc ſeroit un vrai Quarré, & par conſequent b ſeroit à d comme Quarré à Quarré, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Conditions requiſes pour des Produits quarrez.

17. Il ſuit de là que ſi un Nombre Quarré eſt multiplié par un qui ne ſoit pas Quarré, le Produit ne ſera pas un Quarré.

Si le Produit bbd étoit un Quarré, on auroit $bb. bbd :: 1. d$.

Donc l'unité qui eſt un Quarré, ſeroit à d, comme bb à bbd comme Quarré à Quarré, & d ſeroit Quarré.

Autrement. Si bbd étoit un vrai Quarré, il ſeroit un Produit de b par $\sqrt{d}$. Donc d auroit une vraie Racine.

18. Mais les Puiſſances de ces trois Grandeurs, ſavoir bb, cc, dd, ſeront Commenſurables entre elles ; c'eſt-à-dire, s'exprimeront par Nombres ; car puiſque les Racines b, c, d, ſont en Progreſſion, leurs Puiſſances le ſeront auſſi, par l'Article 11 des Raiſons Compoſées. Or ſi bb, cc, dd, ſont en Progreſſion, $bbdd$ ſera égal à c^4. Or $bbdd$ eſt un vrai Quarré, puiſque b & d ſont des Nombres. Donc ſon égal c^4 ſera auſſi un vrai Quarré, qui aura pour ſa Racine $cc = bd$.

19. Si deux Nombres forment un Produit quarré, ces deux Nombres ſeront entr'eux comme Quarré à Quarré.

Digitized by Google

3 fois 12 font 36, Nombre quarré; d'où je conclus que 3 eſt à 12, comme Quarré à Quarré. Ainſi 2 fois 32 font 64; d'où je conclus que 2 eſt à 32, comme Quarré à Quarré; car 3. 12 : : 1. 4, & 2. 32 : : 1. 16; & en general, ſi bd eſt un Quarré, je dis que b eſt à d, comme Quarré à Quarré.

Demonſtration. Puiſque bd eſt un vrai Quarré, il a une vraie Racine en Nombres : appellons-la c, le Quarré cc ſera donc égal à bd, & nous aurons la Progreſſion $\dot{\dot{:}}$ $b. c. d$, ou $b. d : : bb. cc$.

2o. Dans la Progreſſion $\dot{\dot{:}}$ $b. c. d$, ſi b n'eſt pas à d, comme Nombre à Nombre, le Moïen Terme ne pourra pas non plus s'exprimer par Nombres; car puiſque $b. d : : bb. cc$, *Alternando*. $b. bb : : d. cc$. Donc $bcc = bbd$. Si donc b & c étoient Nombres, bcc ſeroit auſſi un Nombre, & par conſequent dbb ſon égal, qui étant diviſé par bb, l'une de ſes Racines, donneroit pour Quotient d, qui ſeroit auſſi un Nombre, contre la ſuppoſition; car dbb Nombre diviſé par bb Nombre, donneroit pour Quotient un Nombre.

Ou l'un des deux Termes b & d eſt un Nombre, ou ils ne ſont Nombres ni l'un ni l'autre. Si le Terme b étoit Nombre, & que le Moïen Proportionnel ſe trouvât auſſi Nombre, cc étant Nombre, bcc ſeroit Nombre, & ſon égal bbd ſeroit auſſi Nombre, qui auroit pour l'une de ſes Racines bb, Nombre par la ſuppoſition, & l'autre d, Nombre auſſi, mais contre la ſuppoſition; car tout Nombre qui ſe diviſe exactement par un autre Nombre, donne pour Quotient un Nombre. Mais ſi b & d n'étoient des Nombres ni l'un ni l'autre, & que pourtant le Moïen c fût un Nombre, bd ſeroit égal au vrai Quarré cc. Or dans

Digitized by Google

la Proportion $b.d::bb.cc$. Quand même b n'eſt pas Nombre, ſon Quarré eſt toûjours Nombre; car le Quarré de la Racine de 2, c'eſt 2; & en general, le Quarré de la Racine de z, c'eſt z; & ainſi b ſeroit à d, comme Nombre à Nombre, contre la ſuppoſition. Par exemple, ſi l'on diſoit que la Racine de 5 n'eſt pas à la Racine de 8, comme Nombre à Nombre, & que pourtant le Moïen Proportionnel c pourroit s'exprimer en Nombres, j'aurois $\dot{\div}\sqrt{5}.c.\sqrt{8}$. Donc $cc=\sqrt{5}\times\sqrt{8}$.

Or $\sqrt{5}\times\sqrt{5}.cc::\sqrt{5}.\sqrt{8}$. Donc $5.cc::\sqrt{5}.\sqrt{8}$.

Donc $\sqrt{5}$ ſeroit à $\sqrt{8}$, comme le Nombre 5 au Nombre cc.

21. J'ajoûte que les Puiſſances de tous les Termes b, c, d, ne peuvent pas s'exprimer par Nombres; car ſi bb, cc, dd, étoient Nombres, leurs Racines ſeroient auſſi des Nombres.

J'ai $\sqrt{2}$ & $\sqrt{5}$: j'appelle leur Moïen Proportionnel c, & j'ai la Progreſſion $\dot{\div}\sqrt{2}.c.\sqrt{5}$. Je forme les Puiſſances de ces trois Termes, & j'aurai la Progreſſion $\dot{\div}2.cc.5$. Je dis que cc ne peut pas s'exprimer en Nombres; car dans cette Progreſſion le Plan $10=c^4$. Or ſi cc étoit un Nombre, c^4 ſeroit un vrai Quarré, & par conſequent le Produit 10, & en general le Produit des Extrêmes ſeroit un Quarré. Or ſi le Produit de 2 par 5 étoit un Quarré, 2 ſeroit à 5, comme Quarré à Quarré, & la $\sqrt{2}$ ſeroit à $\sqrt{5}$, comme vraie Racine de Quarré à une vraie Racine de Quarré, & par conſequent comme Nombre à Nombre, contre la ſuppoſition.

Remarque ſur les deux Articles precedens.

Dans les precedentes Demonſtrations, nous éta-

Digitized by Google

bliſſons deux Propoſitions Négatives. Or pour établir des Propoſitions Négatives, ou pour prouver qu'il faut effectivement les nier, c'eſt une Méthode tout-à-fait naturelle que d'amener à contradiction par ſes propres principes, celui qui voudroit les affirmer. Ainſi celui qui voudroit affirmer que *c c* Moïen Proportionnel entre les Puiſſances de la Racine de 2 & la Racine de 5, eſt un Nombre, ſeroit obligé de tomber d'accord que la Racine de 5 & la Racine de 2 peuvent ſe quarrer; & il eſt manifeſte que ſi elles peuvent ſe quarrer, l'une donnera 2 & l'autre 5. Celui qui tient pour l'Affirmative, & qui veut qu'après avoir établi la Progreſſion ∴ $\sqrt{2}$. *c*. $\sqrt{5}$, l'on puiſſe former leurs Puiſſances, & avoir ces Puiſſances en Nombre, doit convenir que 2 & 5 ſont les Puiſſances des Extrêmes; & de cette Propoſition avoüée, nous l'amenons à des conſequences, qui, le jettant en contradiction, le réduiſent à nier ce qu'il avoit affirmé.

22. Dans la Progreſſion ∴ *b*. *c*. *d*. *f*, ſi *b* eſt à *f* comme Nombre Cube à Nombre Cube, les Moïens *c* & *d* pourront s'exprimer par Nombres; car *b*. *f* : : b^3, c^3, & puiſque *b* & *f* ſont des Nombres, fb^3 ſera un Nombre, auſſi-bien que bc^3 ſon égal; & ſi bc^3 eſt Nombre, puiſque *b*, l'une de ſes Racines eſt Nombre, l'autre c^3 ſera auſſi Nombre: par conſequent c^3 ſera un vrai Cube, & ſa Racine *c* eſt un Nombre, & *c c* étant égal à *b d*, le Produit *b d* ſera un Nombre, auſſi bien que ſes Racines *b* & *d*. Conditions requiſes pour les Cubes.

J'ai 3 & 24; pour ſavoir ſi je pourrai trouver deux Moïens Proportionnels entre ces deux Termes, je réduis la Fraction $\frac{3}{24}$ à ſes plus petits ter-

mes $\frac{1}{8}$, d'où je conclus que 3. 24 :: 1. 8, ou comme Cube à Cube.

Et puiſque 3 eſt à 24, comme le Cube de 3 = 27 eſt au Cube du premier des Moïens Proportionnels que je cherche, lequel s'appelle c^3, j'ai donc la Proportion 3. 24 :: 27. c^3; & par la Regle de Proportion, je trouve $c^3 = 216$, dont la Racine Cube eſt 6. J'ai donc la Progreſſion $\dddot{:}$ 3. 6. d. 24; puiſque 36 Quarré de 6 eſt égal au Plan de 3 d, en diviſant 36 par 3, le Quotient $12 = d$.

23. Mais dans la Progreſſion $\dddot{:}$ b. c. d. f, ſi b & f ſont des Nombres qui ne ſoient pas entr'eux comme des Nombres Cubes, je dis que les Moïens c & d ne pourront pas s'exprimer par Nombres; car b. f :: b^3. c^3, & par conſequent b^3 & c^3 ne ſont pas tous deux Nombres Cubiques; & puiſque b^3 eſt Cube (car b eſt Nombre auſſi-bien que f) reſte donc c^3, qui n'eſt pas Nombre Cubique, & par conſequent ſa Racine n'eſt pas Nombre, & puiſque b. c :: c. d, il faut que d ne ſoit pas Nombre, car ſi d étoit Nombre, $b\,d$ ſeroit Nombre, contre ce que je viens de prouver.

3 n'eſt pas à 12 comme Cube à Cube; voila pourquoi je chercherai inutilement entr'eux deux Moïens Proportionnels qui ſoient Nombres : car ſi j'opere, j'aurai 3. 12 :: 27. c^3, & je trouverai $c^3 = 108$, qui n'eſt pas Cube, & ainſi j'aurai pour mon ſecond Terme la Quantité Irrationnelle $\sqrt[3]{108}$.

24. Mais dans le cas où b eſt à f, comme Nombre à Nombre, je dis que leurs Cubes b^3, c^3, d^3, f^3, peuvent s'exprimer par Nombres; car puiſque b eſt à f, comme Nombre à Nombre, & que b. f :: b^3. c^3, il s'enſuit que b^3 & c^3 ſont des Nombres; & puiſque b, c, d, ſont en Progreſſion, b^3, c^3, d^3

Digitized by Google

ſeront auſſi en Progreſſion, & dans cette Progreſſion b^3 & c^3, étant des Nombres, d^3 ſera auſſi un Nombre; car puiſque c^3 eſt Nombre, ſon Quarré c^6 ſera Nombre, lequel Quarré eſt égal à $b^3 \times d^3$, lequel aïant pour l'une de ſes Racines le Nombre b^3, aura pour ſon autre Racine le Nombre d^3.

J'ai la Progreſſion ∴ 27. 108. d^3. 1728, dont les quatre Termes ſont les Cubes de la Progreſſion ∴ 3. $\sqrt[3]{108}$. d. 12. Or 11664, Quarré de 108, eſt égal au Plan $27\,d^3$. Donc en diviſant $11664 = 27\,d^3$ par 27, l'on aura pour Quotient un Nombre qui ſera $432 = d^3$.

25. Mais ſi b n'eſt pas à f comme Nombre à Nombre, les Puiſſances b^3, c^3, f, ne pourront pas s'exprimer par Nombres, car $b.f::b^3.c^3$: Si donc b^3 & c^3 étoient des Nombres, b ſeroit à f, comme Nombre à Nombre.

Entre 2 & $\sqrt{5}$, non ſeulement je ne puis trouver deux Moïens Proportionnels en Nombres, mais de plus ſi je fais ∴ 2. c. d. $\sqrt{5}$, les Cubes c^3, d^3, ne ſeront pas des Nombres; car en ce cas $2.\sqrt{5}::8.c^3$; & puiſque le Conſequent de la premiere Comparaiſon n'eſt pas Nombre, celui de la ſeconde ne le ſera pas non plus; car ſi c^3 étoit Nombre, $2c^3$ ſeroit Nombre, & le Produit $8\sqrt{5} = 2c^3$ ſeroit auſſi Nombre, duquel Produit, non ſeulement le Multipliant 8, mais encore le Multiplié $\sqrt{5}$, ſeroit Nombre, contre la ſuppoſition.

26. On ne trouvera pas en Nombres un Moïen Proportionnel entre deux Nombres qui ne ſont pas comme Quarré à Quarré : c'eſt la ſuite de l'Article 19e.

27. Si deux Nombres ne ſont pas entr'eux comme Cube à Cube, ils n'auront pas deux Moïens Proportionnels en Nombres : c'eſt la ſuite de l'Article 22e.

Digitized by Google

Application aux Fractions.

28. Si l'on diviſe un Nombre Quarré en Fractions, & que les Denominateurs de ces Fractions ne ſoient pas des Nombres Quarrez, comme, par exemple, en moitiez, en tiers, en ſeptiémes, ces portions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$ d'un Nombre Quarré ne ſeront pas quarrées; car ſi elles étoient quarrées, en les multipliant par 2, par 3, par 7, & par d'autres Nombres non quarrez, elles formeroient un Quarré, puiſqu'elles égaleroient l'Unité, ou le tout dont elles ſont une portion; car la 5e multipliée par 5, égale le tout. Or nous avons prouvé qu'un Nombre qui n'eſt pas quarré, en multipliant un Quarré, ne formera pas un Produit quarré, Article 16.

Que je multiplie $\frac{1}{7}$ par $\frac{7}{1}$; c'eſt-à-dire, quand je multiplie une Fraction par un nombre égal à ſon Denominateur, & que par là je produits l'Unité, & par conſequent un Quarré : la Regle de l'Article 19e eſt toûjours obſervée; car $\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{1} :: \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{7} :: 1. 49$, & par conſequent le Multiplié & le Multipliant ſont entr'eux comme des Quarrez. Deux Nombres non quarrez peuvent bien former un Produit quarré, mais non pas deux Nombres, dont l'un eſt quarré & l'autre ne l'eſt pas.

29. On prouvera de même, que, ſi l'on diviſe un Cube en Portions, tellement que les Denominateurs de ces Portions ne ſoient pas des Nombres Cubes, ces Portions elles-mêmes ne ſeront pas des Cubes.

Reduction des Racines

30. Une Quantité demeure toûjours la même, ſoit qu'on la conſidere comme la Racine d'un Quar-

Digitized by Google

ré, ſoit qu'on la conſidere comme la Racine d'une autre Puiſſance. a eſt $\sqrt[2]{aa}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^7}$. à un même Nom.

31. De ſorte que pour réduire pluſieurs Racines de differens Noms à un même Nom, il n'y a qu'à élever les plus petites à la même Puiſſance que les plus grandes, ou à rabaiſſer les plus grandes à la même Puiſſance que les plus petites.

32. Quelquefois cela ſe fait fort aiſément, comme ſi j'ai d'un côté la $\sqrt[3]{bb}$, & d'un autre $\sqrt[3]{d}$, je n'ai qu'à changer la premiere en $\sqrt{b^3}$: ou ſi j'avois d'un côté la $\sqrt[2]{b}$, & d'un autre la $\sqrt[4]{d^2}$, je n'aurois qu'à changer celle-ci en $\sqrt[2]{dd}$.

33. Dans d'autres cas l'Operation eſt plus longue. Si j'ai d'un côté $\sqrt[2]{b}$, & d'un autre $\sqrt[3]{d}$; dans ce cas, & dans les ſemblables, il faut élever chacune de ces Puiſſances, juſqu'à ce qu'elles aïent un Nom commun. Si je multiplie le Cube d par lui-même, j'aurai dd, qui ſera une 6e Puiſſance; & ſi je multiplie le Quarré b par lui-même, j'aurai bb pour 4e Puiſſance, qui étant encore multipliée par le Quarré b, me donnera b^3 pour 6e Puiſſance; & par là ſans rien toucher à la valeur, je changerai mes Quantitez en 6es Puiſſances.

Quand donc je dois amener au même Nom deux Racines *Sourdes* ou *Incommenſurables*, 1°. Si les Quantitez qui marquent leurs Puiſſances ne ſont pas des ſimples Lettres, mais des Lettres accompagnées de quelques Expoſans (b, d, f, g, cd, ſont des Exemples du premier cas; bb, d^4, g^5, ſont des Exemples du ſecond) l'on commence par réduire ces Puiſſances à des Puiſſances inferieures. Ainſi je réduis les $\sqrt[4]{b^2}$, $\sqrt[4]{d^3}$ à $\sqrt[2]{b^4}$ & $\sqrt[4]{dd}$ en bb, d, bb encore & d. Si j'ai $\sqrt[6]{b^4}$. $\sqrt[6]{d^{12}}$, je ne puis pas abaiſſer la premiere, mais je puis

Digitized by Google

abaiſſer la ſeconde, & la changer en $\sqrt[5]{d^6}$. On abaiſſera ainſi les Puiſſances dont les Lettres auront annexé le même Expoſant que la Racine, ou dont l'Expoſant formera une Puiſſance qui pourra être du même Nom avec la Puiſſance deſignée par l'Expoſant de la Racine; car nous avons vû que la même Quantité peut appartenir à pluſieurs Puiſſances.

2°. Après avoir abaiſſé les Puiſſances à leurs petits Termes, ſi l'Expoſant de la Racine de l'une ſe trouve Diviſeur exact de l'Expoſant de la Racine de l'autre, l'on ne touchera point à la plus grande des Puiſſances, & l'on élevera ſeulement la moindre au même degré, en la multipliant autant de fois que l'Expoſant de la Racine eſt contenu dans l'Expoſant de l'autre. Ainſi quand j'ai $\sqrt[4]{b}$. $\sqrt[36]{d}$; de b. 4e Puiſſance, je fais une 36e Puiſſance, en la multipliant conſecutivement 9 fois, & j'aurai $\sqrt[36]{b^9} = \sqrt[4]{b}$. Si j'avois $\sqrt[3]{b^5}$ & $\sqrt[24]{d}$, j'éleverois b^5 3e Puiſſance à la 24e, en multipliant ſon Expoſant par 8 & $\sqrt[24]{b^{40}} = \sqrt[3]{b^5}$.

3°. Et lorſque les Expoſans des Racines n'ont point entr'eux cette Raiſon, il faut multiplier l'un par l'autre, & le Produit ſera l'Expoſant commun aux deux Racines; puis l'on multipliera la premiere Puiſſance par l'Expoſant de la ſeconde Racine, & la ſeconde Puiſſance par l'Expoſant de la premiere. J'ai $\sqrt[3]{b}$. $\sqrt[5]{d}$, les Expoſans communs ſeront $\sqrt[15]{}$, & j'aurai $\sqrt[15]{b^5} = \sqrt[1]{b}$, & $\sqrt[15]{d^3} = \sqrt[5]{d}$; car par le même Nombre qui multiplie les Expoſans des Racines, je multiplie les Puiſſances, & ainſi la valeur des Racines ne change point.

Digitized by Google

Si j'ai $\sqrt[5]{b^3}$ & $\sqrt[7]{d^4}$, j'aurai $\sqrt[35]{b^{21}} = \sqrt[5]{b^3}$ & $\sqrt[35]{d^{20}} = \sqrt[7]{d^4}$.

Lorſque les Expoſans des deux Racines à réduire au même Nom, ont une même Meſure Commune, 1°. il faut multiplier ces Expoſans l'un par l'autre, 2°. diviſer le Produit par la Meſure Commune de ces Expoſans, & le Quotient indiquera l'Expoſant commun des deux Racines. 3°. On élevera chaque Racine par la Multiplication à proportion que ſon Expoſant aura été élevé.

J'ai la $\sqrt[6]{ab}$, $\sqrt[8]{c^3 d^4}$. 1°. 2 eſt Meſure Commune de 6 & de 8. 2°. Je multiplie 6 par 8. 3°. Je diviſe le Produit 48 par 2. 4°. Chacune de mes Racines ſera la Racine d'une 24e Puiſſance, en l'élevant à la 4e, puiſque 6 eſt contenu 4 fois en 24, & j'ai $\sqrt[24]{a^4 b^4} = \sqrt[6]{ab}$. 5°. J'éleve $c^3 d^4$ depuis la 8e à la 24e Puiſſance, en le cubant, puiſque 8 eſt 3 fois en 24, & j'ai $\sqrt[24]{c^9 d^{12}} = \sqrt[8]{c^3 d^4}$.

La Demonſtration de cette pratique eſt fondée ſur ce Théorême. Quand deux Nombres ont une Meſure Commune, 1°. Le Produit de leur Multiplication ſe diviſe par cette Meſure Commune. 2°. Le Quotient de cette Diviſion ſe diviſe par chacun de ces Nombres.

Demonſtration. c ſoit la Meſure Commune de a & de b. 2°. $\frac{a}{c}$ ſoit $= e$. Donc $ce = a$. 3°. $\frac{b}{c}$ ſoit $= d$. Donc $cd = b$. Donc $ab = cced$. Or $cced$ ſe diviſe par c, & le Quotient eſt ced; & puiſque ced ſe diviſe par ce, il ſe diviſera auſſi par $a = ce$, & puiſque ced ſe diviſe par cd, il ſe diviſera auſſi par $b = cd$, & ainſi le Quotient

de ab diviſé par c, ſe diviſera par a & par b.

Quand les Expoſans ont un Diviſeur commun, on peut auſſi diviſer l'un & l'autre par ce Diviſeur commun. Ainſi $\sqrt[8]{a^{12}}$ & $\sqrt[20]{a^{16}}$ étant propoſées, je réduirai en diviſant chaque Expoſant par 4, $\sqrt[8]{}$ en $\sqrt[2]{}$, & $\sqrt[20]{}$ en $\sqrt[5]{}$.

Après cela, au lieu que a^{12} étoit une 8e Puiſſance, il faudra l'abaiſſer en telle ſorte que $\sqrt[8]{a^{12}}$ devienne égale à une $\sqrt[2]{}$.

Or quand j'ai $\sqrt[2]{a^2} = a$, j'aurai pour ſon égale $\sqrt[2]{aa}$.

Je diviſe donc l'Expoſant de la Puiſſance par le même Nombre qui a diviſé l'Expoſant du Signe Radical, j'aurai $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$; car comme a^{12} eſt 4e Puiſſance de a^3, ainſi l'Expoſant 8 marque la 4e Puiſſance de l'Expoſant 2.

Par les mêmes raiſons, je changerai $\sqrt[20]{a^{16}}$ en $\sqrt[5]{a^4}$.

Après quoi, pour réduire ces deux Racines au même Nom, je multiplierai leurs Expoſans, & j'aurai $\sqrt[10]{}$.

Après cela j'éleverai a^3 à la 5e Puiſſance, & a^4 à la 2e, & j'aurai $\sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2]{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$. Et de l'autre côté j'aurai $\sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[20]{a^{16}}$.

Reduction aux plus petits Termes.

34. Pour réduire une Racine à ſes plus petits Termes, ſans rien changer à ſa valeur, ce qu'on appelle *trouver ſon Expoſant*; il faut diviſer le Nombre qui exprime cette fauſſe Puiſſance par une autre qui la diviſe exactement, & qui ſoit une veritable Puiſſance, de même eſpece, & on mettra la Racine de ce Diviſeur avant le Signe Radical, & le Quotient après. Ainſi je diviſerai les faux

Quarrez

Quarrez 27, 75, 80; par 9, par 25, par 16; 2°. Je considererai ces derniers Quarrez comme formant les Produits 27, 75, 80, par la Multiplication de 3 & 5, qui sont les Quotiens de la Division. 3°. Considerant donc ces faux Quarrez comme des Produits de 9 par 3, de 25 par 3, de 16 par 5, je dirai qu'ils ont pour Racine la Racine de 9, multipliée par la Racine de 3, la Racine de 25, multipliée par la Racine de 3, la Racine de 16, multipliée par la Racine de 5; c'est-à-dire, pour mes Racines, j'aurai $3\sqrt{3}$, $3\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{5}$.

Plus la Puissance qui divise le faux Quarré est exprimée en grands Nombres, plus le Quotient sera petit, & par consequent la Racine sera réduite à de plus petits Termes.

La même Grandeur Irrationelle peut s'exprimer en plusieurs manieres. Il faut se rendre familieres ses differentes expressions, afin de choisir celles qui se trouveront les plus commodes pour executer ce qu'on se propose.

Quand une Racine Sourde est precedée de quelque Quantité, 1°. on éleve cette Quantité qui precede le Signe Radical à la Puissance marquée par l'Exposant de ce Signe. 2°. On multiplie ce qui se trouve sous le Signe Radical par cette Puissance de ce qui le precedoit.

Ainsi $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$.

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \times 8} = \sqrt[3]{24}$.

$2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 \times 32} = \sqrt[5]{96}$.

Et en general, $b\sqrt{c} = \sqrt{b^2 c}$. $b\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{b^3 c}$.

D'autres fois l'on fait tout le contraire, & 1°. Ce qui est sous le Signe Radical, on le divise. 2°. Le Quotient de cette Division s'écrit sous le Signe Radical, & la Racine du Diviseur se place avant le Signe Radical.

Digitized by Google

Ainſi $\sqrt[3]{48\,a^3\,b^4}$ ſe diviſe par le Cube $8\,a^3\,b^3$. L'on écrit 6 Quotient de cette Diviſion ſous le Signe Radical, & la Racine $2\,ab$ du même Cube devant ce Signe, ce qui donne $2\,ab\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48\,a^3\,b^4}$.

Si l'on avoit $\sqrt[3]{48\,a^3\,b^5}$, la Diviſion ſe feroit par le Quarré $16\,aabb$, & l'on auroit $\sqrt[3]{48\,a^3\,b^5} = 4\,ab\sqrt[3]{3\,ab}$.

Lorſque les Expoſans des Quantitez qui ſont ſous le Signe Radical ont un Diviſeur commun avec l'Expoſant du Signe Radical, 1°. L'on diviſe chacun de ces Expoſans par le Diviſeur commun. 2°. Par là la Racine ſe trouve abaiſſée à un degré inferieur, ſans changer de valeur.

Par exemple, dans $\sqrt[4]{a^6\,b^6}$ l'on a pour Diviſeur commun 2, ce qui donne lieu de faire $\sqrt[4]{a^6\,b^6} = \sqrt[2]{a^3\,b^3}$.

Si les Quantitez Litterales avoient été precedées de quelque Nombre, il faudroit que ce Nombre eut une Racine convenable au nouvel Expoſant du Signe Radical. Ainſi $\sqrt[4]{16\,a^6\,b^6}$ ſe change en $\sqrt[2]{4\,a^3\,b^3}$.

Si j'ai $\sqrt[9]{64\,a^6\,b^{15}}$, mon commun Diviſeur ſera 3, ce qui changera $a^6\,b^{15}$ en $aa\,b^5$, & $\sqrt[9]{}$ en $\sqrt{}$. Il faudra donc changer 64, & à ſa place écrire ſa Racine Cube, qui eſt 4, & l'on aura $\sqrt[9]{64\,a^6\,b^{15}} = \sqrt[3]{4\,aa\,b^5}$. De même, la $\sqrt[6]{16\,a^8\,b^{10}}$ ſe changera en $\sqrt[3]{4\,a^4\,b^5}$.

Dans cet Exemple la $\sqrt[6]{}$ ſe change en $\sqrt[3]{}$, de ſorte que la ſeconde eſt la Racine Quarrée de la premiere; au lieu que dans le precedent la $\sqrt[9]{}$ ſe changeoit en 3, & que par là la ſeconde devenoit Racine Cube de la premiere.

Eclairciſſemens.

35. Afin que tout ce que l'on demontre ſur les *Racines Sourdes* n'ait point l'air, & ne puiſſe être

ſoupçonné de Sophiſme, il faut conſiderer, 1°. qu'un Nombre qui n'eſt pas une vraie Puiſſance, ne peut avoir de Racine exprimée ni en Nombre entier, ni en Fraction, comme nous l'avons déja prouvé.

2°. Que l'on peut aller par Approximation de degré en degré, & parvenir à des Racines, qui, multipliées par elles-mêmes, approcheront toûjours plus de donner pour Produit un Nombre qui égale celui dont on cherche la Racine, & qui eſt une fauſſe Puiſſance.

3°. Quand donc une intelligence auroit pouſſé les Calculs & les Approximations ſans ſe donner aucun relâche pendant des millions redoublez de Siecles, & par là ſeroit parvenu à une Racine, qui, multipliée par elle-même, approcheroit ſi fort de donner des Produits égaux à 27, 75, 80, que ce qui s'en manqueroit, ſeroit imperceptible, une telle Racine mettroit en droit de regarder les Nombres 27, 75, 80, comme des vrais Quarrez, ſans crainte d'erreur perceptible & de la moindre conſequence.

4°. En ce cas là 27, 75, 80, paſſeroient pour des Quarrez produits par la Multiplication des vrais Quarrez 9, 25, 16, par les Quarrez 3 & 5.

5°. Et comme 3 & 5, en vertu de cette infinie Approximation que l'on ſuppoſe faite, ſeroient reçûs pour des vrais Quarrez, ſans crainte encore d'erreur perceptible, dans cette ſuppoſition que 3 & 5 ſont des Quarrez, il ſera permis de conclure que le Quarré 27 a pour ſa Racine la Racine du Quarré 9, multipliée par la Racine du Quarré 3; que le Produit 75 a pour ſa Racine la Racine du Quarré 25, multipliant la Racine du Quarré 3, & qu'enfin la Racine du Quarré 80, a pour ſa

Racine la Racine du Quarré 16 = 4, multipliant la Racine du Quarré 5.

6°. S'il ſe manque quelque choſe de l'exacte verité de ces Concluſions & de ces Produits, ce ne ſera qu'autant que les Racines de 3 & de 5 ſeront au-deſſous des vraies Racines. Or dans la ſuppoſition de l'Approximation pouſſée par des Operations continuées des milliers de millions de Siecles redoublez, ce qu'il s'en manque que la Racine ne ſoit juſte, eſt reputé pour un rien.

7°. Et l'on ne peut pas objecter qu'une telle Approximation n'a pas été faite; c'eſt aſſez qu'elle ſoit poſſible, & qu'on puiſſe lui donner un nom, qui eſt $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, & operer ſur elle deſignée par ces Signes, comme ſi elle étoit connuë.

8°. Si donc $25 = bb$ & $3 = aa$, $aabb = 75$, & $ab = \sqrt{75}$. Or $ab = 5\sqrt{3}$, puiſque $a = \sqrt{aa} = \sqrt{3}$, & que $b = 5$.

Nous avons ſouvent beſoin dans l'Algebre d'extraire des Racines de certaines Quantitez connuës pour manifeſter des inconnuës; mais comme les Quantitez dont il ſe trouve que l'on doit extraire les Racines ne ſont pas toûjours veritables Puiſſances, auſſi leurs Racines ne peuvent s'exprimer par de veritables Nombres; elles ſe deſignent neanmoins aſſez exactement par leurs Puiſſances, pour pouvoir les multiplier, les diviſer, & ſouvent encore les ajoûter en une ſeule ſomme, les ſouſtraire & connoître leurs Rapports.

Par exemple, la $\sqrt{12}$ & la $\sqrt{48}$ ne peuvent s'exprimer en Nombres ni l'une ni l'autre; cependant le rapport des Puiſſances 12 & 48 qui m'eſt connu, ſert à me manifeſter le rapport de leurs Racines, puiſque quand les Quarrez ſont comme 4. 1, leurs Racines ſont comme 2. 1. D'où l'on conclud que $\sqrt{48}. \sqrt{12} :: 2. 1 :: 2\sqrt{12}. 1\sqrt{12}$.

Digitized by Google

Pour operer avec des Racines, il faut qu'elles ſoient des Racines de Puiſſances également élevées : j'ajoûterai aiſément la Racine d'un Cube avec la Racine d'un Cube ; mais il n'en ſera pas de même s'il faut ajoûter la Racine d'un Quarré avec la Racine d'un Cube. Exemple, $\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{a}=3\sqrt[3]{a}$; mais s'il falloit ajoûter $\sqrt[2]{a}$ avec $\sqrt[3]{a}$, je ne trouverois pas la même facilité.

Il faut donc trouver moïen de les élever à la même Puiſſance ſans changer leur valeur, ce qui s'appelle rappeller des Racines aux mêmes Denominateurs.

Pour cet effet, l'on multiplie l'un par l'autre les deux Expoſans des Puiſſances, comme ici 2 par 3, & le Produit marque la Puiſſance commune à laquelle il faut élever ces deux Puiſſances differentes ; de ſorte qu'à la place de $\sqrt[2]{}$ & de $\sqrt[3]{}$, j'aurai $\sqrt[6]{}$ & $\sqrt[6]{}$. Mais comme en changeant la $\sqrt[2]{a}$ en $\sqrt[6]{}$, j'ai diminué la valeur de $\sqrt[2]{a}$, pour la rétablir dans la premiere valeur, il faut que j'éleve a à proportion que j'ai baiſſé la Racine ; a étoit un Quarré, il en faut faire une 6e Puiſſance. Il faut donc le cuber, & l'on aura $\sqrt[1]{a^3}=\sqrt[2]{a}$. L'on aura de même $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{aa}$.

Il faut donc multiplier les Expoſans des deux Racines, pour en faire un Expoſant commun. 2°. Il faut conſiderer les Quantitez qui ſont ſous les Signes Radicaux, comme ſi elles étoient des Racines, & élever la ſeconde à la Puiſſance indiquée par l'Expoſant de la premiere ; & reciproquement la premiere à la Puiſſance indiquée par l'Expoſant de la ſeconde.

Lorſque l'on peut également abaiſſer, & les Si-

gnes Radicaux, & les Puiſſances qui ſont ſous les Signes, on baiſſe les uns & les autres avant que de les rappeller aux mêmes Denominateurs, afin que par là les Puiſſances, & par conſequent les Racines ſoient plus ſimples & moins compoſées.

Si j'ai la $\sqrt[4]{a^6}$ & $\sqrt[12]{a^4}$, je puis faire $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[2]{a^3}$, & $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[6]{a^2}$, après quoi j'aurai $\sqrt[12]{a^{18}} + \sqrt[12]{a^4}$.

On peut auſſi élever ſimplement $\sqrt[4]{a^6}$ à la 12e Puiſſance, en écrivant $\sqrt[12]{a^{18}}$; car ſi a^6 eſt la 4e Puiſſance, a^{18} Cube de a^6 ſera la 12e, puiſque la 12e eſt le Cube de la 4e.

Raiſon des Racines ſourdes entr'elles.

36. Dès qu'une fois l'on a ainſi réduit deux Racines Sourdes à leur Expoſant, & qu'elles ſe trouvent élevées à la même Puiſſance, & qu'enfin les Termes qui ſuivent les Signes Radicaux ſont les mêmes, on a en Nombres les Proportions de ces Racines; car de deux Produits compoſez chacun de deux Racines, ſi le premier à l'une de ſes Racines égale à l'une des Racines du ſecond, ces Produits ſeront entr'eux comme les Racines inégales; ainſi $\sqrt[2]{45}$ eſt à $\sqrt[2]{80}$, comme 3 à 4, parce que l'une de ces Racines c'eſt 3 multiplié par $\sqrt[2]{5}$, & l'autre 4, multiplié par $\sqrt[2]{5}$.

Autant qu'il eſt poſſible que 45 & 80 aïent des Racines juſtes, autant il eſt poſſible que ces Racines ſoient égales l'une à $3\sqrt{5}$, l'autre à $4\sqrt{5}$; autant donc qu'il eſt poſſible d'arriver par l'Approximation aux Racines de 45 & de 80, ou autant qu'il eſt permis de ſuppoſer cette Approximation déja faite, autant il eſt vrai que $\sqrt{45} . \sqrt{80} :: 3 . 4$.

37. Il y a d'autres Méthodes qui font connoître la Raiſon de deux Racines Incommenſurable

Digitized by Google

2°. Si ces Racines ſont ſuppoſées des Racines Quarrées, on multipliera les deux faux Quarrez l'un par l'autre ; & ſi leur Produit eſt un vrai Quarré, la premiere Racine ſera à la ſeconde, comme le Nombre qui exprime la premiere des Puiſſances eſt à la Racine du Produit : ou la ſeconde ſera à la premiere, comme le Nombre qui exprime la ſeconde Puiſſance eſt à la Racine du Produit.

Demonſtration. $\sqrt{bb}.\sqrt{cc}::b.c.$ Or $b.c::bb.\sqrt{bbcc}=bc$, car le Produit des Extrêmes & celui des Moïens eſt le même, ſavoir bbc ; par conſequent il y a proportion. Or ce que nous venons de prouver des vrais Quarrez, s'applique exactement aux faux, à meſure que l'Approximation approche de les égaler à de vrais Quarrez.

Je prouverai de même, que $c.b::cc.\sqrt{bbcc}=bc$.

Ainſi $\sqrt{2}.\sqrt{8}::2.\sqrt{16}=4::1.2$.

$\sqrt{bc}.\sqrt{aabc}::bc.abc::bc.\sqrt{aabc}\times\sqrt{bc}=\sqrt{aabbcc}$.

Car les Puiſſances $bc.\ aabc.\ bbcc.\ aabbcc$ ſont en Proportion, puiſque le Produit aab^3c eſt le Produit, tant des Extrêmes que des Moïens, & ſi les Puiſſances ſont en Proportion, leurs Racines le ſeront auſſi.

Puiſque $2.4::9.18$, ſi ces quatre Quantitez étoient toutes quatre des vrais Quarrez, on auroit $\sqrt{2}.\sqrt{4}::\sqrt{9}.\sqrt{18}$.

On auroit par conſequent $\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}=6$.

Donc plus les Nombres qu'on aura trouvé pour tenir la place de $\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}$ approcheront, en ſe multipliant eux mêmes, de faire 2 & 18, plus auſſi ces mêmes Nombres, multipliez l'un par l'autre,

approcheront de faire un Produit = 6.

Puiſque l'on peut ranger en Proportion les Incommenſurables, par les raiſons que nous venons de dire, il eſt viſible qu'on peut avoir une Progreſſion d'Incommenſurables.

∴ 1. 2. 4. 8. 16. 32.

$\sqrt[2]{1}$. $\sqrt[2]{2}$. $\sqrt[2]{4}$. $\sqrt[2]{8}$. $\sqrt[2]{16}$. $\sqrt[2]{32}$.

$\sqrt[3]{1}$. $\sqrt[3]{2}$. $\sqrt[3]{4}$. $\sqrt[3]{8}$. $\sqrt[3]{16}$. $\sqrt[3]{32}$.

37. Si les Racines ſont Cubiques, & que le Quarré du premier de ces Cubes, multipliant le Nombre qui indique le ſecond Cube, forme un vrai Cube, la premiere Racine ſera à la ſeconde comme le premier Cube à la Racine du Produit du Quarré du premier Cube par le ſecond, & reciproquement la ſeconde Racine à la premiere, comme le ſecond Cube à la Racine du Produit du premier Cube par le Quarré du ſecond.

Demonſtration. $\sqrt[3]{b^3}$. $\sqrt[3]{c^3}$ :: b. c :: b^3. $\sqrt{b^6 \times c^3} = bbc$; & reciproquement $c.b :: c^3. \sqrt{b^3 \times c^6} = bcc$. Or ce qui ſe dit des vrais Quarrez s'applique aux faux, par les raiſons que nous avons alleguées.

Ainſi $\sqrt{2}$. $\sqrt{54}$ :: 2. $\sqrt{216} = 6$, & $\sqrt[3]{54}$. $\sqrt[3]{2}$ :: $\sqrt[3]{5832} = 18$. $\sqrt{216} = 6$ :: 3. 1, & ci-deſſus $\sqrt{2}$. $\sqrt{54}$ :: 2. 6. Donc *Invertendo* $\sqrt{54}$. $\sqrt{2}$ :: 6. 2 :: 3. 1.

Car $2 \times 216 = 8 \times 54$. Les Puiſſances 2. 54 :: 8. 216. ſont en Proportion, donc leurs Racines le ſont.

38. Toutes les fois que la premiere de ces Méthodes a lieu, on peut auſſi emploïer la ſeconde.

J'ai $\sqrt[3]{x}$ & $\sqrt{z}$. Si $\frac{x}{m} = p^3$ & $\frac{z}{m} = q^2$, ce que la premiere Méthode ſuppoſe,

On aura $mp^3 = x$ & $mq^2 = z$. Donc $xxz = mmp^6 \times mq^2 = m^3 p^6 q^2$, dont la Racine Cube eſt $mppq$.

Digitized by Google

Or $\sqrt[3]{mp^1}\ (=\sqrt[3]{x}).\ \sqrt[3]{mq^1}\ (=\sqrt[3]{z})::mp^1\ (=x).\ mppq$.

Car $mp^1.\ mppq::p.\ q$, & $\sqrt[3]{mp^1}.\sqrt[3]{mq^1}::\sqrt[3]{p^1}.\sqrt[3]{q^1}$; puiſque le Produit des Extrêmes eſt égal au Produit des Moïens.

39. Si les Racines ſont de la 4e Puiſſance, la premiere Racine ſera à la ſeconde, comme le premier Quarré de Quarré eſt à la Racine d'un Produit formé par le Cube de cette premiere Puiſſance, & l'autre Quarré de Quarré.

Demonſtration. Les Puiſſances ſont b^4, c^4, les Racines b & c. Or $b.\ c::b^4.\ b^3c=\sqrt[4]{b^{12}c^4}$ Produit de b^{12} par c^4, & reciproquement $c.\ b:1c^4.\ bc^3=\sqrt[4]{b^4c^{12}}.\ \sqrt[4]{2}.\ \sqrt[4]{32}::2.\ 4=\sqrt[4]{256}$, Produit de 32 par 8, Cube de 2; & en effet, $\sqrt[4]{2}$ eſt $=1\sqrt[4]{2}$ & $\sqrt[4]{32}=2\sqrt[4]{2}$. Or $1\sqrt[4]{2}.\ 2\sqrt[4]{2}::1.\ 2::2.\ 4$.

40. Il y a enfin une maniere de découvrir la Raiſon des Incommenſurables, qui ſe fait par la Diviſion. 1°. L'on diviſe la plus grande Puiſſance par la plus petite. 2°. Si le Quotient ſe trouve une Puiſſance du même nom, la premiere Racine ſera à la ſeconde, comme l'Unité eſt à la Racine de ce Quotient.

Demonſtration. $\sqrt{bb}=b$, $\sqrt{b^4}=bb$. $\frac{b^4}{bb}=bb$.

Or $1.\ b::b.\ bb$. $\sqrt[3]{b^3}=b.\ \sqrt{b^6}=bb$. Or $b.\ bb::1.\ b$.

De même, $\sqrt[4]{b^4}=b$, $\sqrt[4]{b^8}=bb$.

41. Pour comprendre la raiſon de cette pratique, & l'étendre à toutes les Puiſſances, il faut

Digitized by Google

remarquer, 1°. Que l'Unité eſt une Racine de chaque Puiſſance. 2°. Quand on a deux Puiſſances de même nom, ſi l'on diviſe la premiere par l'Unité (Puiſſance de même eſpece) l'on aura pour Quotient cette même Puiſſance. 3°. Après avoir diviſé la ſeconde Puiſſance par la premiere, qui eſt la plus petite, ſi ce Quotient ſe trouve une Puiſſance exacte de même eſpece, en diviſant la ſeconde Puiſſance par ce Quotient, l'on aura la premiere pour Quotient, parce que quand le Quotient devient Diviſeur, le Diviſeur devient Quotient. 4°. L'on pourra donc changer les deux Racines données en deux autres dans leſquelles le Signe Radical ſera ſuivi du même Nombre, & precedé dans l'une de l'Unité & dans l'autre de la Racine du Quotient de la ſeconde diviſé par la premiere, & ainſi la premiere ſera à la ſeconde, comme l'Unité à la Racine de ce Quotient.

Puiſque $\sqrt[3]{2} = 1\sqrt[3]{2}$, & $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$, il s'enſuit que $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{54} :: 1.3$.

Addition. 42. Pour ajoûter des Racines Sourdes, 1°. Il faut les réduire, ſi on le peut, à un même Nom, & enſuite l'on ajoûte en une ſomme les Expoſans de leurs Raiſons; c'eſt-à-dire, les Nombres qui précedent le Signe Radical.

Lorſque les Nombres qui deſignent les faux Quarrez ſe peuvent diviſer l'un & l'autre exactement par un Quarré, & que ces deux Diviſions donnent le même Quotient, alors l'on peut operer ſuivant la Regle. Ainſi $\sqrt{20}$ & $\sqrt{80} = 2\sqrt{5}$ & $4\sqrt{5}$ ajoûtées, font $6\sqrt{5}$. $\sqrt{72}$ & $\sqrt{162} = 6\sqrt{2}$ & $9\sqrt{2}$ ajoûtées, font $15\sqrt{2}$. $\sqrt{72}$ & $\sqrt{32} = 6\sqrt{2}$ & $4\sqrt{2}$ ajoûtées, feront $10\sqrt{2}$.

En effet, les Quarrez ſont en Raiſon Doublée

Digitized by Google

des Racines. Or dans le premier Exemple, les Racines ſont comme 2 à 4. Or 2. 4 :: 4. 8, & la Raiſon Doublée de 2 à 4, c'eſt celle de 2 à 8, ou de 1 à 4. Or les Quarrez 20 & 80 ſont entr'eux comme 2. 8, comme 1. 4.

Dans le ſecond, 2. 3 :: 3. $4\frac{1}{2}$, & 2. $4\frac{1}{2}$ :: 1. $2\frac{1}{4}$ :: 72. 162.

Dans le 3e, les Racines ſont comme 3 à 2. Or 3. 2 :: 2. $1\frac{1}{3}$, & la Raiſon Doublée de celle de 3 à 2, c'eſt celle de 3 à $1\frac{1}{3}$, ou de $\frac{9}{3}$ à $\frac{4}{3}$, ou de 9 à 4. Or 9. 4 :: 72. 32.

43. J'ai deux Incommenſurables $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{96}$. Je veux ſavoir ſi leur Rapport peut s'exprimer par Nombres.

Si les faux Quarrez 24 & 96 ſont entr'eux comme deux vrais Quarrez bb, cc, on aura 24. 96 :: bb. cc.

Donc $\sqrt[3]{24}$. $\sqrt[3]{96}$ :: $\sqrt{bb}$. $\sqrt{cc}$ :: b. c.

Pour ſavoir ſi 24. 96 ſont comme Quarré à Quarré, je diviſe 96 par 24, & ſi l'Expoſant eſt à l'Unité comme Quarré à Quarré, 96 ſera à 24 comme Quarré à Quarré, car 1. 4 :: 24. 96.

On tirera les Racines de ces Quarrez, & elles marqueront le Rapport de $\sqrt[3]{24}$ à $\sqrt[3]{96}$.

$\frac{96}{24} = \frac{4}{1}$. Donc 24. 96 :: 1. 4, & $\sqrt[3]{24}$. $\sqrt[3]{96}$ :: 1. 2.

J'ai $\sqrt[3]{24}$ & $\sqrt[3]{\frac{75}{2}}$. Or $\sqrt[3]{24}$. $\sqrt[3]{\frac{75}{2}}$ :: $\sqrt{48}$. $\sqrt{75}$.

J'ai donc $\sqrt{48}$ & $\sqrt{75}$. $\frac{75}{48} = 1\frac{27}{48} = 1 + \frac{9}{16} =$

Digitized by Google

$= \frac{16}{16} + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$. 48. 75 : : 16. 25. Donc $\sqrt{48}$. $\sqrt{75}$: : 4. 5.

J'ai $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{16}$. $\frac{54}{16} = 3 + \frac{6}{16} = 3 + \frac{3}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$. Donc 54. 16 : : 27. 8. Donc $\sqrt[3]{54}$. $\sqrt[3]{16}$: : $\sqrt[3]{27}$. $\sqrt[3]{8}$: : 3. 2.

Et en general, quand j'ai $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{c}$. Si b. c : : g^m. f^m, & que g^m & f^m ſoient de vraies Puiſſances de g & f élevés à la Puiſſance m, j'aurai $\frac{b}{c} = \frac{g^m}{f^m}$. Donc $\sqrt[m]{b}$. $\sqrt[m]{c}$: : $\sqrt[m]{g^m}$. $\sqrt[m]{f^m}$: : g. f.

44. Lorſque le Produit de deux faux Quarrez donne un vrai Quarré, on tire la Racine de ce Quarré, on la double, & ce Nombre doublé on l'ajoûte à la Somme des deux faux Quarrez, & la Somme qui reſulte de cette Addition eſt le Quarré, dont la Racine égale les deux Racines propoſées.

Demonſtration. $\sqrt{2} = x$, $\sqrt{18} = z$. Donc $\sqrt{2} + \sqrt{18} = x + z$. Donc $xx = 2$ & $zz = 18$; puis donc que $x + z$ eſt la Racine de $xx + zz + 2xz$, il ne me reſte plus qu'à avoir la valeur de $2xz$. Or $xxzz = 36$, & par conſequent $xz = 6$, & $2xz = 12$. Donc $xx + zz + 2xz = 2 + 18 + 12$; c'eſt-à-dire, 32 & $x + z = \sqrt{32}$, lequel Nombre peut encore ſe réduire à de plus petits Termes.

45. Lorſque l'on a deux Quantitez, qui, diviſées par des Quarrez, donnent le même Quotient; ces Quantitez multipliées l'une par l'autre produiſent un Quarré. Que f diviſé par bb donne pour Quotient m, auſſi-bien que g diviſé par cc, on

Digitized by Google

aura $bbm = f$ & $ccm = g$. Donc $fg = bbccmm$, qui eſt un Quarré, dont la Racine eſt bcm.

46. Reciproquement, ſi deux Quantitez non quarrées, multipliées l'une par l'autre, produiſent un Quarré, je dis que l'on peut les diviſer chacune par un Quarré & avoir le même Quotient.

Demonſtration. Que fg ſoit un Quarré, il eſt certain que f & g peut être diviſé par un Quarré. Appellons le Quotient de la premiere Diviſion x, & celui de la ſeconde y. Appellons le premier Diviſeur bb, & le ſecond cc, nous aurons $f = bbx$ & $g = ccy$. Donc $fg = bbccxy$. Or, par la ſuppoſition fg eſt Quarré, & par conſequent $x = y$, afin que bcy multiplié par bcx forme le Quarré $bbccxy$.

Autre Demonſtration. Si fg eſt un Quarré, 1°. f eſt à g, comme Quarré à Quarré. Appellons le premier de ces Quarrez bb, & l'autre cc, nous aurons $f. g :: bb. cc$. Donc $f. bb :: g. cc$. Donc $\frac{f}{bb} = \frac{g}{cc}$. Appellons l'Expoſant de la premiere de ces Fractions x, & celui de la ſeconde y, & nous aurons $\frac{f}{bb} = x$ & $\frac{g}{cc} = y$. Or $\frac{f}{bb} = \frac{g}{cc}$. Donc $x = y$.

47. Ainſi la ſeconde Méthode n'a lieu que dans les cas où l'on peut emploïer la premiere, & l'operation de la ſeconde aboutit au même effet que celle de la premiere.

Dans le premier Exemple la $\sqrt{20}$ ajoûtée avec $\sqrt{80}$, donnent $\sqrt{180}$, laquelle réduite à ſes plus petits Termes eſt $6\sqrt{5}$. Voïez Nombre 42.

Dans le ſecond Exemple la $\sqrt{72}$ & la $\sqrt{162}$ ajoûtées, donnent la $\sqrt{450}$, qui, réduite à ſes plus petits Termes eſt $5\sqrt{18}$.

Digitized by Google

48. Après avoir ajoûté deux Racines en une, l'on joindra à cette Somme une troiſiéme Racine.

Je dois ajoûter en un $\sqrt{72}$, $\sqrt{162}$, $\sqrt{288}$. Je commence par l'addition des deux premieres, & la premiere Méthode me donnera $15\sqrt{2}$, la ſeconde me donne $\sqrt{450}$: il faut maintenant que je lui ajoûte $\sqrt{288}$.

Par la premiere Méthode, en diviſant 450 par par le Quarré 25, j'ai pour Quotient 18, & en diviſant 288 par le Quarré 16, j'ai auſſi pour Quotient 18. Ainſi $\sqrt{450}=5\sqrt{18}$, & $\sqrt{288}=4\sqrt{18}$. Donc leur Somme c'eſt $9\sqrt{18}$.

Par la ſeconde Méthode, 1°. Je multiplie 288 par 450, & j'ai pour Produit 129600.

2°. La Racine de ce Quarré c'eſt 360.

3°. Je la double, & j'ajoûte 720 à 738, ſomme des Quarrez.

4°. Je conclus que $\sqrt{450}+\sqrt{288}=\sqrt{1458}$. Or cette Racine a des plus petits Termes, & en la diviſant par le Quarré 81, elle ſe trouve équivalente à $9\sqrt{18}$.

49. Si les Racines propoſées n'admettent pas ces operations, l'on ſe contente de les joindre par le Signe +.

Souſtraction. 50. Pour ce qui eſt de la *Souſtraction*, après avoir réduit les Racines au même Nom ; l'on ſouſtrait l'Expoſant de l'une de l'Expoſant de l'autre.

Je dois ôter $\sqrt{48}$ de $\sqrt{75}$, 1°. $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ & $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, le reſidu ſera donc $\sqrt{3}$.

51. Si l'on peut faire un Quarré en multipliant les deux Quarrez des Racines propoſées, l'on tire la Racine de ce Quarré veritable ; on double cette Racine, & on ôte ce double de la Somme des deux

Digitized by Google

faux Quarrez, le reſte eſt un Quarré dont la Racine contient le reſidu que l'on cherche.

Demonſtration. $18 = xx$. $2 = zz$. Donc $\sqrt{18} - \sqrt{2} = x - z$. Or $x - z$ eſt la Racine du Quarré $xx + zz - 2xz$, & puiſque $xz = 6$, & $2xz = 12$: ſi de $xx + zz = 20$, vous ôtez $2xz = 12$, reſtera 8 pour le Quarré dont la Racine eſt $= x - z$.

En multipliant 48 par 75, j'ai le Quarré 3600 dont la Racine eſt 60, 120 double de ce cette Racine ôtée de $123 = 48 + 75$, le reſidu eſt 3, & par conſequent la Souſtraction donnera pour le reſidu $\sqrt{3}$.

Multipliant 18 par 2, j'ai 36 dont la Racine eſt 6, dont le double $= 12$, ôté de 20, reſte 8. Or $\sqrt{8}$ réduite à ſes plus petits Termes, égale $2\sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, de laquelle ſi l'on ôte $\sqrt{2}$, reſtera $2\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{8}$.

52. Lorſqu'on ne peut faire ces operations, l'on ſe contente de ſouſtraire une Racine de l'autre par le Signe —.

53. Quand on doit multiplier une Racine par elle-même, il n'y a qu'à ôter le Signe Radical. Multiplication.

54. Puiſque $\sqrt{2}$ ne peut s'exprimer en Nombres, il ſemble que c'eſt un grand paradoxe & même une contradiction de la multiplier ; c'eſt-à-dire, de la trouver enfin ajoûtée un nombre précis de fois, ſavoir préciſément autant de fois qu'elle contient l'Unité, laquelle Unité elle ne contient point préciſément, ni ne peut contenir. Eclairciſſement.

Mais, comme nous l'avons déja remarqué, ces ſortes d'operations ſur les *Racines Sourdes*, renferment une *Propoſition hypothetique* ; & il eſt certain que ſi 2 avoit une Racine, cette Racine,

multipliée par elle-même, produiroit 2.

Autant donc que l'on approche d'avoir une Racine exacte de 2, autant cette Racine obtenuë par l'Approximation, approche, en ſe multipliant elle-même, de produire exactement 2; & comme il eſt poſſible de venir, par un travail continué ſans interruption, dans une ſuite de mille millions de ſiecles, à une Racine ſi approchante d'être exacte, que ce qui s'en manquera ſera imperceptible à l'entendement même, & pourra être négligé; ce qui ſe manquera qu'une telle Racine produiſe exactement 2, deviendra imperceptible. Ainſi, ſans l'avoir trouvée, nous ſavons quel produit elle donneroit, & nous pouvons, ſans craindre aucune erreur d'une perceptible conſequence, dire que ce Produit ſera 2.

Une preuve que l'erreur doit paſſer pour imperceptible, c'eſt que pour petite que vous l'aſſigniez, il n'y a qu'à ſuppoſer les Approximations réiterées encore autant de fois qu'elles ont été faites, & l'erreur deviendra incomparablement plus petite; & puiſque l'Approximation peut ſe réiterer ſans fin & ſans ceſſe, ce qui ſe manque de la parfaite exactitude d'une Racine Sourde eſt plus petit que toute petiteſſe aſſignable.

Continuation des Regles de Multiplication.

55. Lorſque les Signes Radicaux ſont de la même eſpece, il faut multiplier les Quantitez qui ſont ſous ces Signes l'une par l'autre, & on prepoſera au Produit le même Signe Radical.

$\sqrt{5}$ multipliée par $\sqrt{2}$, donne pour Produit $\sqrt{10}$; car ſi 5 & 2 étoient vrais Quarrez, la Racine de leur Produit ſeroit le Produit de $\sqrt{2}$, multipliée par $\sqrt{5}$. Or ce qui s'en manque que 10 ne ſoit vrai Quarré devenant imperceptible, à cauſe de l'Approximation indéfinie, ce qui s'en manquera que

que 10 n'ait une vraie Racine, ſera auſſi imperceptible. Or ſi 10 avoit une vraie Racine, cette Racine ſeroit $R2$ multipliée par $R5$.

x multipliée par z, donne xz. Donc Rxx multipliée par RZZ, donne xz; & xz eſt $Rxxzz$. De même, Aa multipliée par Rb, ſera Rab.

56. Si les Racines ſont precedées de quelque Nombre, l'on multiplie ces Nombres l'un par l'autre, & l'on place leur Produit avant le Signe Radical. Ra multipliée par Rb, donne pour Produit Rab; & par conſequent $2Ra$, multipliée par $3Rb$, donne 6 fois la valeur de Rab.

Puiſque Ra multipliée par Rb, donne Rab; Ra multipliée par $2Rb$, donnera le double, & par conſequent $2Rab$; & en general, Rb multipliée par cRa, donnera $cRab$, & cRa multipliant dRb, donnera $cdRab$.

De pluſieurs Termes Incommenſurables, on peut former, par la Multiplication, un Produit qui ſe réduira à très-peu de Termes.

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} + \sqrt{48} \\ \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \\ \hline \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{96} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{144}. \end{array}$$

J'ai déja $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$. Donc $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5 + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{96} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{144}$. $\sqrt[3]{96} = 2\sqrt[3]{12}$. Donc $\sqrt[3]{96} + \sqrt[3]{12} = 3\sqrt[3]{12}$. $\sqrt[3]{144} = 2\sqrt[3]{18}$. Donc $\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{144} = 3\sqrt[3]{18}$. On a donc $5 + 3\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{18}$.

57. Lorſque le Produit des faux Quarrez eſt un vrai Quarré, le Produit des deux Racines Sourdes eſt un Nombre $R3 \times R27$, donne $R81 = 9$.

Il eſt certain que 2 multipliant 18, donne un Quarré, qui a pour ſa Racine veritable 6. Or autant que 2 & 18 approchent d'être vrais Quarrez, au-

tant 6, Racine de leur Produit, approche d'être le Produit de leurs Racines. Donc ce qui s'en manque que 6 ne ſoit exactement le Produit de $\sqrt{2}$ par $\sqrt{18}$ eſt plus petit qu'aucune Quantité aſſignable.

Diviſion. §8. Pour diviſer une Racine Sourde par une autre, l'on diviſe le Quarré de l'une par le Quarré de l'autre, le Quotient qui reſulte de la Diviſion de ces deux Quarrez eſt lui-même un Quarré, dont la Racine contient le Quotient que l'on cherche; car la Diviſion défait ce que la Multiplication a fait. Comme donc la Racine du Produit des Quarrez, eſt le Produit des Racines multipliées, auſſi le Quotient des Quarrez diviſez a pour ſa Racine le Quotient que l'on cherche d'une Racine diviſée par l'autre.

$\sqrt{aabb}$ eſt ab; $\sqrt{bb}$ eſt b. Donc diviſer $\sqrt{aabb}$ par $\sqrt{bb}$, c'eſt diviſer ab par b, ce qui donne le Quotient a, lequel eſt $\sqrt{aa}$. Or ſi je diviſois le Quarré $aabb$ par le Quarré bb, j'aurois pour Quotient aa, & la Racine de ce Quotient, c'eſt a. Si donc j'avois à diviſer $\sqrt{aa}$ par $\sqrt{b}$, j'aurois pour Quotient $\sqrt{\frac{aa}{b}}$.

Si j'ai à diviſer $\sqrt{8}$ par $\sqrt{2}$, 1°. Je diviſe le Quarré 8 par le Quarré 2, & j'ai pour Quotient 4. 2°. La Racine de ce Quotient eſt le Quotient de $\sqrt{8}$ diviſée par $\sqrt{2}$, & par conſequent le Quotient ſera 2.

Si je diviſe $\sqrt{12}$ par $\sqrt{6}$, le Quotient ſera $\sqrt{2}$.

Si je diviſois $4\sqrt{12}$ par $\sqrt{6}$, le Quotient ſeroit 4 fois plus grand, & par conſequent ſeroit $4\sqrt{2}$.

Si je diviſois $8\sqrt{20}$ par $4\sqrt{10}$, j'aurois $2\sqrt{2}$; car 1°. $\sqrt{20}$ diviſée par $\sqrt{10}$, donne $\sqrt{2}$. 2°. $8\sqrt{20}$ diviſée par $\sqrt{10}$, donnera 8 fois plus, & par con-

Digitized by Google

ſequent $8\sqrt{2}.3^{o}$. Mais ſi au lieu du Diviſeur $\sqrt{2}$, j'avois eu un Diviſeur quadruple, ſavoir $4\sqrt{2}$, mon Quotient auroit été 4 fois moindre, & j'aurois eu $2\sqrt{2}$.

Il faut donc diviſer Quarré par Quarré, & diviſer auſſi le Nombre qui precede l'une des Racines par le Nombre qui precede l'autre.

Si j'avois à diviſer $9b - 25c - 16f + 4d + 12\sqrt{bd} - 40\sqrt{cf}$ par $5\sqrt{c} + 3\sqrt{b} + 4\sqrt{f} + 2\sqrt{d}$.

Je prévois déja que dans le Quotient, j'aurai $\sqrt{c}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{f}$ $\sqrt{d}$, puiſque j'ai b c. d. f. dans le Dividende, qui eſt un Produit du Quotient par le Diviſeur.

Je comprens encore qu'il y aura des — dans le Quotient, puiſqu'il y en a dans le Dividende, & qu'il n'y en a point dans le Diviſeur.

Et de là je prévois que des Quantitez évanoüies reparoîtront.

Je commence par diviſer le Quarré $9b$, & je le change en $\sqrt{81bb}$ pour le diviſer par $\sqrt{9b} = 3\sqrt{b}$. Or $\frac{+\sqrt{81bb}}{+\sqrt{9b}} = \sqrt{9b} = 3\sqrt{b}$.

Par ce Quotient je multiplie le Diviſeur, & j'ai $15\sqrt{bc} + 9\sqrt{bb}\,(=9b) + 12\sqrt{bf} + 6\sqrt{bd}$.

J'ôte ce Produit du Dividende

$$9b - 25c - 16f + 4d + 12\sqrt{bd} - 40\sqrt{cf}\,(3\sqrt{b} + 2\sqrt{d} - 5\sqrt{c} - 4\sqrt{f}$$
$$9b \quad - 15\sqrt{bc} \quad - 6\sqrt{bd} \quad - 12\sqrt{bf}$$

Il me reſte $-15\sqrt{bc} - 25c + 16f + 4d + 6\sqrt{bd} - 40\sqrt{cf} - 12\sqrt{bf}$.

Je paſſe à $4d$, parce qu'il eſt ſous le Signe +, & je fais $4d = \sqrt{16dd}$, que je diviſe par $\sqrt{4d} = 2\sqrt{d}$, & j'ai $\frac{+\sqrt{16dd}}{+\sqrt{4d}} = \sqrt{4d} = 2\sqrt{d}$.

Je multiplie le Diviſeur, & j'ai $10\sqrt{cd}+6\sqrt{bd}+8\sqrt{fd}+4\sqrt{dd}(=4d.)$

J'ôte du Dividende, & il me reſte $-15\sqrt{bc}-25c-16f-40\sqrt{cf}-10\sqrt{cd}-8\sqrt{fd}-12\sqrt{bf}$.

Je vois après cela $-5\sqrt{c}\times+5\sqrt{c}=-25\sqrt{cc}=-25c$. Je prens donc pour troiſiéme Quotient $-5\sqrt{c}$. Je multiplie, j'ôte, & il me reſte $-16f-20\sqrt{cf}-12\sqrt{bf}-8\sqrt{fd}$, & ce reſte eſt préciſémement $=-4\sqrt{f}\times 5\sqrt{c}+3\sqrt{b}+4\sqrt{f}+2\sqrt{d}$.

Autre Méthode d'Addition.

59. Il y a une maniere d'ajoûter & de ſouſtraire qui ſe fait enſuite de la Multiplication & de la Diviſion. En voici les Fondemens.

1°. b & c peuvent deſigner univerſellement deux Quantitez quelconques. 2°. Leur Somme, c'eſt b & c. 3°. Suppoſons que c eſt la plus petite, & que nous diviſons la plus grande par la plus petite; b par c. 4°. Le Quotient de cette Diviſion ſera $\frac{b}{c}$. 5°. A ce Quotient ajoûtez 1, vous aurez $\frac{b}{c}+1$. 6°. Si l'on multiplie cette Somme par le Diviſeur c, l'on aura $b+c$. Donc ſi l'on diviſe la plus grande par la plus petite, & qu'après avoir ajoûté l'Unité au Quotient, on multiplie cette derniere Somme par le Diviſeur, on aura la Somme des deux Quantitez.

Je dois ajoûter la $R2$ avec la $R8$. 1°. Je diviſe la $R8$ par la $R2$, & j'ai pour Quotient $R4=2$. 2°. J'ajoûte 1 & j'ai 3. 3°. Je multiplie 3 par la $\sqrt{2}$, & j'ai $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$; car $3=\sqrt{9}$ & $3\times\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=\sqrt{18}$.

Je dois ajoûter $\sqrt[3]{16}$ & $\sqrt[3]{54}$; le Quotient ſera $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$. Ajoûtant 1, j'aurai $\frac{5}{2}$, & multipliant

$\sqrt[3]{16}$ par $\frac{5}{2}$, j'aurai $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{16}$, & $\frac{5}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\frac{1000}{8}} = \sqrt[3]{250}$; car $\frac{5}{2} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}}$. Donc $\frac{5}{2} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{250}$.

60. Je viens à la *Souſtraction*. Si l'on multiplie $\frac{b}{c} - 1$ par c, l'on aura $b - c$. Donc ſi du Quotient de la premiere Grandeur, diviſée par la ſeconde, l'on retranche l'Unité, & que l'on multiplie le Reſidu par le Diviſeur, l'on aura la premiere Grandeur diminuée de la ſeconde, ou l'on aura ſouſtrait la ſeconde de la premiere. Et de Souſtraction.

De $\sqrt{72}$ je dois ôter $\sqrt{8}$. 1°. Je fais la Diviſion, & j'ai pour Quotient $\sqrt{9} = 3$. 2°. Je multiplie $3 - 1 = 2$ par la $\sqrt{8}$, & j'ai $2\sqrt{8} = = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = \sqrt{32}$.

Je dois ôter la $\sqrt[3]{24}$ de $\sqrt[3]{81}$. 1°. Je diviſe & j'ai pour Quotient $\sqrt[3]{3\frac{9}{24}} = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$. 2°. J'en ôte l'Unité, reſte $\frac{1}{2}$. La Somme eſt donc $\frac{1}{2}\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\frac{24}{8}} = \sqrt[3]{3}$; car $\frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$. Donc $\frac{1}{2} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \times \sqrt[3]{\frac{24}{1}} = \sqrt[3]{\frac{24}{8}} = \sqrt[3]{3}$.

61. Pour tirer la Racine Quarrée de $\sqrt[3]{a}$, il me faut faire une Racine égale à $\sqrt[3]{a}$, & qui ſoit la Racine d'une Puiſſance quarrée; c'eſt-à-dire d'une Puiſſance dont l'Expoſant ſoit un Nombre pair, ou un Multiple de 2. Extraction.

Je multiplie donc 3 par 2, & je change $\sqrt[3]{}$ en $\sqrt[6]{}$.

Digitized by Google

Mais pour conſerver l'égalité, il faut que j'éleve auſſi a à une ſeconde Puiſſance, & j'aurai $\sqrt[6]{aa} = \sqrt[1]{a}$.

La Racine Quarrée de $\sqrt[6]{aa}$, c'eſt $\sqrt[6]{a}$, puiſque $\sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{aa}$.

Je veux tirer la $\sqrt[5]{}$ de $\sqrt[4]{b^1}$.

Je multiplie 4 par 5, & au lieu de $\sqrt[6]{}$, j'ai $\sqrt[20]{}$. Par là j'ai élevé l'Expoſant à une 5e Puiſſance; il faut donc, pour conſerver l'égalité, que j'éleve b^1 à la 5e Puiſſance, & j'aurai $\sqrt[20]{b^{1\,5}} = \sqrt[1]{b^1}$.

La Racine 5e, c'eſt $\sqrt[5]{b^1}$, car $\sqrt[20]{b^1} \times \sqrt[20]{b^1} \times \sqrt[20]{b^1} \times \sqrt[20]{b^1} \times \sqrt[20]{b^1} = \sqrt[20]{b^{1\,5}}$.

En en general, ſi je veux avoir $\sqrt[m]{}$ de $\sqrt[n]{c^1}$, je fais $\sqrt[mn]{c^{1\,m}} = \sqrt[mn]{c^{1\,n}}$, dont la $\sqrt[m]{}$ eſt $\sqrt[mn]{c^{1\,n}}$.

CHAPITRE XVI.

Des Racines Compoſées.

Définition. 1. UN aſſemblage de pluſieurs Racines liées par les Signes + ou —, s'appellera *Binome* s'il y en a deux; un *Trinome* s'il y en a trois; un *Quadrinome* s'il y en a quatre, & en general pluſieurs un *Multinome* ou *Polynome*.

Addition. 2. On range, pour faire l'Addition, les parties du ſecond Polynome, ſous les parties du premier, & en les rangeant on obſerve que deux *Parties Commenſurables* entr'elles, ſoient placées l'une ſous

Digitized by Google

l'autre; & voila pourquoi l'on range l'un ſous l'autre les Nombres Commenſurables, s'il y en a dans le *Polynome*.

3. Lorſque deux Racines ſont affectées toutes deux du Signe —, ou l'une du Signe +, & l'autre du Signe —, l'on ſuit les regles ordinaires de l'Addition des Quantitez affectées de ces Signes.

4. Si les parties appartiennent à differentes Puiſſances, on les réduit à même Denomination.

5. Au Polynome $\sqrt[2]{3} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{8} + \sqrt[3]{24} - 7$, je dois joindre le Polynome $\sqrt[2]{27} - \sqrt[3]{40} + 4 - \sqrt[6]{9} + \sqrt[4]{128}$. 1°. Je range le Commenſurable + 4 ſous le Commenſurable — 7. 2°. Puiſque le Quotient de 27 par 3, eſt un Quarré, je range $\sqrt[2]{27}$ ſous $\sqrt[2]{3}$. 3°. Par la même raiſon, je range $\sqrt[3]{40}$ ſous $\sqrt[3]{5}$, parce que le Quotient de $\sqrt[3]{40}$ diviſé par $\sqrt[3]{5}$, eſt $\sqrt[3]{8} = 2$. 4°. Sous $\sqrt[4]{8}$ je range $\sqrt[4]{128}$, parce que $\frac{128}{8} = 16$ quatriéme Puiſſance de 2. 5°. Je réduis au même Denominateur la $\sqrt[3]{24}$ & la $\sqrt[6]{9}$, ce qui me donne $\sqrt[6]{576}$ & $\sqrt[6]{9}$: Je poſe, & j'opere pour l'Addition ſuivant le n° 59, & pour la Souſtraction ſuivant le n° 60.

Addition.

$$\begin{array}{l} \sqrt[2]{3} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{8} + \sqrt[6]{576} - 7. \\ \sqrt[2]{27} - \sqrt[3]{40} + \sqrt[4]{128} - \sqrt[6]{9} + 4. \\ \hline \sqrt{48} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[6]{9} - 3. \end{array}$$

6. Du Polyn. $\sqrt[2]{27} - \sqrt[3]{40} + \sqrt[4]{128} - \sqrt[6]{9} + 4$. Souſtraction.

Il faut ſouſtraire $\sqrt[2]{3} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{8} + \sqrt[6]{576} - 7$.

Reſte . . . . $2\sqrt[2]{3} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[4]{648} - \sqrt[6]{6561} + 11$.

Digitized by Google

Seconde Méthode pour l'Addition.

7. 1°. On divise une Racine par l'autre. 2°. L'on ajoûte l'Unité au Quotient de cette Division. 3°. On multiplie cette Somme par le Diviseur, & le Produit donne la somme des Racines.

Pour la Soustraction.

1°. On divise une Racine par une autre. 2°. On diminuë d'une Unité le Quotient de cette Division. 3° On multiplie cette Somme par ce Diviseur, & le Produit donne la difference des Racines.

Troisiéme Methode.

8. Joignez par le Signe + les deux Racines qu'il faut ajoûter en une somme. 2°. Elevez ce Binome à la Puissance dont il s'agit, & qui est déja designée par l'Exposant commun des deux Racines. Si les deux Racines, sur lesquelles on vient d'operer ainsi, sont Commensurables, le Produit que l'on vient de former sera un Monome Rationnel, dont la Racine par consequent contiendra en une somme la valeur du Binome qui a produit ce Monome.

Il faut ajoûter la $\sqrt[3]{2}$ avec la $\sqrt[3]{54}$.

Je cube le Binome $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54}$, & j'ai $2 + 54 + 3\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{2916} \times \sqrt[3]{2}$, ce qui est égal à $56 + \sqrt[3]{5832} + \sqrt[3]{157464}$. Or $\sqrt[3]{5832} = 18$. $\sqrt[3]{157464} = 54$. Donc le tout monte à 128, & ainsi $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54}$.

Quatriéme.

9. On se sert d'une troisiéme Méthode qui aboutit au même effet. Lorsque deux Racines Sourdes ont un commun Diviseur, & que les deux Quotiens des deux Divisions donnent chacun une vraie Puissance, & par consequent une vraie Racine en Nombre, l'on fait la Regle de Trois, & l'on dit, comme le premier Divisé est au second, ainsi le premier Quotient est au second. Par consequent comme le petit Quotient est à la somme

Digitized by Google

du petit & du grand, ainſi la petite Racine eſt à la ſomme de la petite & de la grande. L'on multiplie donc la petite Racine par la ſomme des Quotiens, & l'on diviſe le Produit par le petit Quotient, ce qui donne la ſomme cherchée.

Par exemple, $\sqrt[2]{147}$ & $\sqrt[2]{12}$ ont pour commun Diviſeur la $\sqrt[2]{3}$, le grand Quotient eſt $\sqrt[2]{49} = 7$, & le petit $\sqrt[2]{4} = 2$. Donc : : 2. 7, ainſi $\sqrt[2]{4}. \sqrt[2]{49}$. Par conſequent 2. 2 + 7 : : $\sqrt[2]{12}. \sqrt[2]{12} + \sqrt[2]{147}$, ou 2. 9 : : $\sqrt[2]{12}. \sqrt[2]{12} + \sqrt[2]{147}$.

Je multiplie $\sqrt[2]{12}$ par 9, c'eſt-à-dire par la $\sqrt[2]{81}$, ce qui me donne $\sqrt[2]{972}$.

Je la diviſe par 2 ou par $\sqrt{4}$, & j'ai pour Quotient $\sqrt{243} = \sqrt{147} + \sqrt{12}$; car $9 \times \sqrt{12} = 2 \times \sqrt{12} + \sqrt{147}$. Donc $9 \times \sqrt{12}$ diviſé par $2 = \sqrt{12} + \sqrt{147}$.

10. Cette derniere Méthode eſt beaucoup plus compoſée que la ſeconde, & toutes les fois que l'une peut avoir lieu, l'on peut auſſi ſe ſervir de l'autre; voila pourquoi il vaut mieux s'en tenir à la ſeconde. Remarque premiere.

Je dis que l'on peut pratiquer la ſeconde dans tous les cas où la quatriéme a lieu; car quand celle-ci a lieu, les deux Quotiens ſont comme Nombre à Nombre, par conſequent les deux Racines ſont Commenſurables entr'elles : & quand elles ſont Commenſurables, l'une peut ſe diviſer par l'autre, & le Quotient de la Diviſion eſt une vraie Puiſſance, vraie Racine de Puiſſance, puiſque deux Racines Commenſurables ſont entr'elles, comme le Quotient de leur Diviſion eſt à l'Unité.

11. Comme il eſt facile d'ajoûter deux Racines Seconde.

Digitized by Google

de même denomination qui precedent des Quantitez égales; comme, par exemple, 2 fois la $\sqrt{3}$ avec 5 fois la $\sqrt{3}$, car cela monte à 7 fois $\sqrt{3}$, ou $7\sqrt{3} = \sqrt{147}$. L'on donne pour regle de trouver moïen d'amener deux Racines, ſans changer leur valeur, au point que la même Quantité ſe trouve ſous le Signe Radical de l'une & de l'autre. Cela a lieu toutes les fois que cette Quantité qui doit être placée ſous ce Signe Radical de l'une & de l'autre, eſt leur Diviſeur Commun, & que les Quotiens de ces Diviſions ſont de vraies Puiſſances.

Comme, par exemple, $\sqrt[2]{12}$ & la $\sqrt[2]{75}$ ont pour commun Diviſeur 3, l'un de ces Quotiens eſt $\sqrt{4} = 2$, & l'autre $\sqrt{25} = 5$, ce qui découvre que $\sqrt{12}$ eſt le Produit de $\sqrt{3}$ par 2, & par conſequent eſt égale à $2\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{4} \times \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{12}$.

De même, $\sqrt[2]{75} = 5\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{25} \times \sqrt[2]{3}$.

On voit par là que cette Regle n'a lieu que dans les cas de la ſeconde; & puiſqu'on peut l'emploïer dans tous les cas, il eſt viſible encore qu'elle ſuffit & qu'elle doit être preferée par ſa ſimplicité.

Souſtraction. 12. Ces quatre Méthodes donnent quatre differentes Regles de Souſtraction. Rien n'eſt plus aiſé que de ſouſtraire une Racine Sourde d'une autre de même nom, & qui a ſous elle une Quantité égale. Si de $7\sqrt{3}$, j'ôte $5\sqrt{3}$, il eſt manifeſte qu'il me reſtera $2\sqrt{3} = \sqrt[2]{12}$.

Si donc de $\sqrt{243}$ je veux ôter $\sqrt[2]{75}$, je leur cherche d'abord un Diviſeur commun, qui eſt $\sqrt[2]{3}$. Le Quotient de la premiere Diviſion, c'eſt

$\sqrt[2]{81} = 9$, & le Quotient de la ſeconde, c'eſt $\sqrt[2]{25} = 5$; d'où je conclus que $\sqrt[2]{243} = 9\sqrt[2]{3}$, & que $\sqrt[2]{75} = 5\sqrt[2]{3}$. Si j'ôte celle-ci de celle-là, il me reſtera $4\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{48}$.

Mais comme cette Méthode n'a lieu que quand les deux Racines propoſées ſont Commenſurables entr'elles, au lieu de tout ce circuit, je diviſe la grande par la petite, & j'ai pour Quotient une vraie Racine. Je multiplie la petite Racine par le Quotient, diminué de l'Unité, & j'ai ce que je cherche. Ici, par exemple, je diviſe $\sqrt[2]{243}$ par $\sqrt[2]{75}$, & j'ai pour Quotient $\sqrt[2]{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$. Je fais donc 1. $\frac{9}{5}$ :: $\sqrt[2]{75}$. $\sqrt[2]{243}$. Donc 1. $\frac{9}{5} - 1$: : : : $\sqrt[2]{75}$. $\sqrt[2]{243} - \sqrt[2]{75}$. Donc $\sqrt[2]{75}$ × par $\frac{9}{5} -$ $- 1$ ($= \frac{4}{5} = \sqrt[2]{\frac{16}{25}}$) qui donne $\sqrt[2]{\frac{1200}{25}} = \sqrt[2]{48}$ eſt égale $\sqrt[2]{243} - \sqrt[2]{75} \times 1$.

On a fait ici une repetition abregée, mais claire de ce qu'on avoit dit ci-devant.

CHAPITRE XVII.

Diviſion des Racines Compoſées.

1. QUand le Diviſeur eſt compoſé de pluſieurs Termes tous Incommenſurables, ou les uns Commenſurables & les autres Incommenſurables, il faut trouver moïen de réduire tous ces Termes à un ſeul, afin de diviſer chaque Terme du Divi- Preparation.

dende par un ſeul Terme; Diviſion qui eſt alors facile, puiſqu'il n'y a qu'à diviſer Puiſſance par Puiſſance, & conſerver au Quotient le Signe Radical. Et ſi le Dividende & le Diviſeur ſont des Racines de differens degrez, il faut les ramener à la même Denomination.

2. Lorſqu'on multiplie un Binome par un certain Multipliant, le Produit devient un Monome.

$$\begin{array}{r} \sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{2} \\ \sqrt[2]{5}-\sqrt[2]{2} \\ \hline 5+\sqrt[2]{10}-2 \\ -\sqrt[2]{10} \end{array}$$

Par exemple, ſi je multiplie $\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{2}$ par $\sqrt[2]{5}-\sqrt[2]{2}$, j'aurai pour Produit $5-2=3$, & voila un Binome, compoſé de Termes Irrationels, changé en un Monome Rationel

Application. 3. Suppoſé donc que j'euſſe à diviſer 12 par $\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{2}$; au lieu de ce Binome, je me ſers du Monome 3; mais comme le Monome 3 n'eſt pas égal au Binome, puiſque le Produit 3 n'eſt pas égal à l'une de ſes Racines, afin que ce changement de Diviſeur ne faſſe aucun changement au Quotient, & qu'en diviſant par 3, j'aïe le même Quotient que ſi je diviſois par $\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{2}$, il faut que je multiplie le Dividende 12 par le même Nombre par lequel j'ai multiplié le Diviſeur; car on a toûjours le même Quotient, lorſque le Dividende & le Diviſeur croiſſent également. Un plus grand Dividende donneroit un plus grand Quotient, mais auſſi un plus grand Diviſeur en donneroit un moindre. Il eſt viſible que 3 a ſont contenus dans 3 b, comme a eſt contenu dans b.

Je multiplie donc $12=\sqrt{144}$ par $\sqrt{5}-\sqrt{2}$,

Digitized by Google

& j'ai $\sqrt{720} - \sqrt{288}$, lequel Nombre je divise par $3 = \sqrt{9}$, & j'ai pour Quotient $\sqrt{80} - \sqrt{32}$. C'est là le Quotient de 12 divisé par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

4. Mais comment choisir toûjours à propos ces Multiplians qui réduisent les Polynomes à des Monomes? Commençons par les Binomes. Il est évident que $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{a} - \sqrt[2]{b}$ donnera pour Produit $a - b$, ce qui est un Monome composé de deux Quantitez Rationelles, dont je réduirai la somme dans une seule Grandeur, en faisant $a - b = c$. Il n'y a donc qu'à changer dans le Multipliant un des Signes + en un Signe —, ou si le Multiplié a un Signe —, changer ce — en +, dans le Multipliant composé des mêmes Lettres. Choix dans les Quarrez.

5. Quand je veux suivre la même Méthode pour un Binome composé de Racines Cubes, je n'ai pas le même succès; Dans les Cubes.

Car si je multiplie $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$

par $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4}$

$+ \sqrt[3]{10}$

j'aurai derechef le Binome $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{4}$.

Et l'inconvenient vient de ce que 25 & 4 ne sont pas des Cubes : or afin qu'au lieu de Quarrez j'aïe des Cubes, je vois manifestement qu'au lieu de multiplier 5 par 5, il faut multiplier chacune de ces Racines par leurs Quarrez 25 & 4.

Digitized by Google

J'eſſaïe & je multiplie $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{8}$

par $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{4}$

& j'ai $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{50} - \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{20}$

J'ai bien les Termes Rationels $\sqrt[3]{125} = 5$ & $-\sqrt[3]{8} = -2$: par conſequent $5 - 2 = 3$; mais j'ai auſſi deux Termes Irrationels $+\sqrt[3]{50} - \sqrt[3]{20}$, qui ne ſe détruiſent pas. Pour découvrir de quelle maniere je dois me conduire, j'opere par Lettres, & après avoir multiplié $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

par $\sqrt[3]{aa} - \sqrt[3]{bb}$

j'ai $\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{aab} - \sqrt[3]{abb} - \sqrt[3]{b^3}$

c'eſt-à-dire, $a - b + \sqrt[3]{aab} - \sqrt[3]{abb}$. Je vois que pour faire évanoüir $+aab$, il faudroit multipilier a par $-ab$, & pour faire évanoüir $-abb$, il faudroit multiplier a par $+bb$;

Je multiplie $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

par $\sqrt[3]{aa} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bb}$

& j'ai $a + \sqrt[3]{aab} - \sqrt[3]{abb} + b - \sqrt[3]{aab} + \sqrt[3]{abb}$

c'eſt-à-dire $a + b$, que je fais égal à c, & je vois qu'entre les deux Termes $\sqrt[3]{aa} + \sqrt[3]{bb}$, je dois inſerer le Moïen Proportionnel $\sqrt[3]{ab}$.

Digitized by Google

Lors donc que j'ai le Binome $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$ je le multiplie par $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$; car 10 Produit de $5 * 2$, répond à ab,

& j'ai $5 - \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{20}$
$+ \sqrt[3]{50} - \sqrt[3]{20} + 2 = 7$

Si j'avois eu $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$, j'aurois multiplié par $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$, & cela m'auroit donné 3.

6. Si mes Racines Irrationelles ſont de la 4e Puiſſance, comme $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$, je trouverai en eſſaïant qu'il faut faire la Multiplication par $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{aab} + \sqrt[4]{bba} - \sqrt[4]{b^3}$; c'eſt-à-dire, 1°. qu'il faut cuber a & b pour avoir a^3 & b^3. 2°. Qu'entre la $\sqrt[4]{a^3}$ & $\sqrt[4]{b^3}$, il faut inſerer les deux Moïens Proportionels $\sqrt[4]{aab}$ & $\sqrt[4]{bba}$. 3°. Qu'il faut ſucceſſivement placer dans le Multipliant les Signes + & —. Dans les quatriémes Puiſſances.

Si donc j'ai à réduire en Monome la $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2}$, je multiplierai ce Binome par $\sqrt[4]{125} - \sqrt[4]{50} +$
$+ \sqrt[4]{20} - \sqrt[4]{8}$.

7. S'il s'agit de 5e Puiſſance, je trouverai que deux Moïens Proportionels ne ſuffiſent pas, mais qu'il en faut 3, & pour réduire en Monome $\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}$, il faudra que je faſſe la Multiplication par $\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^3 b} + \sqrt[5]{aabb} - \sqrt[5]{ab^3} + \sqrt[5]{b^4}$; c'eſt-à-dire, que pour réduire en Monone $\sqrt[5]{5} + \sqrt[5]{2}$, il Dans les cinquiémes,

Digitized by Google

faudra multiplier ce Binome par $\sqrt[5]{625} - \sqrt[5]{250} + \sqrt[5]{100} - \sqrt[5]{40} + \sqrt[5]{16}$, ce qui donnera le Monome $5 + 2 = 7$.

$$\begin{array}{l} \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ \hline a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + b + \sqrt{bc} - c \\ \quad + \sqrt{ab} - \sqrt{ac} \quad - \sqrt{bc} \\ \hline a + b - c + 2\sqrt{ab} \end{array}$$

Soit $a + b - c = d$.

$$\begin{array}{l} d + 2\sqrt{ab} \\ d - 2\sqrt{ab} \\ \hline dd + d2\sqrt{ab} - ab \\ \quad - d2\sqrt{ab} \\ \hline dd - \quad 0 \quad - ab \end{array}$$

8. Dans tous ces cas le Dividende ſe multipliera par les Quantitez qui ont multiplié les Diviſeurs.

9. L'on trouvera par la même voie, que pour réduire un Binome en un Monome, lorſque les Puiſſances ſont au-deſſus du Quarré, il faut 1°. que le premier & le dernier Terme du Polynome multiplicateur contiennent, ſous le Signe Radical, la Quantité qui ſe trouve ſous les Signes Radicaux Binome, à ſavoir le premier Terme la Quantité qui eſt ſous le premier; & le dernier Terme, la Quantité qui eſt ſous le ſecond. 2°. Chacune de ces Quantitez doit être élevée à une Puiſſance d'un degré au-deſſous de l'Expoſant du Signe Radical.

Digitized by Google

dical. Par exemple, si j'ai $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$, le premier & le dernier Terme du Polynome multiplicateur seront $\sqrt[2]{a^6}$ & $\sqrt[2]{b^6}$.

3°. Entre ces deux Termes il faut placer autant de Moïens Proportionels que l'Exposant du Signe Radical contient d'unitez au-dessus de 2 qui est Exposant de la seconde Puissance.

10. Si je multipl. le Trin. $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b} + \sqrt[2]{c}$

par $\sqrt[2]{a} - \sqrt[2]{b} + \sqrt[2]{c}$

$a + \sqrt[2]{ab} + \sqrt[2]{ac} - b - \sqrt[2]{bc} + c$

$- \sqrt[2]{ab} + \sqrt[2]{ac} \quad + \sqrt[2]{bc}$

j'aurai pour Produit $a - b + c$, que je ferai $= d$, laquelle Quantité est Rationelle, & j'aurai pour second Terme $2\sqrt[2]{ac} = \sqrt[2]{4ac}$. Par là mon Trinome se trouvera changé dans le Binome $d + \sqrt[2]{4ac} = \sqrt[2]{dd} + \sqrt[2]{4ac}$. Si je le multiplie par $\sqrt[2]{dd} - \sqrt[2]{4ac}$, j'aurai les deux Quantitez Rationelles $dd - 4ac$; & en faisant $dd - 4ac = e$, le Trinome sera enfin changé dans le Monome e.

11. Alors le Dividende ff, par exemple, devra être multiplié 1°. par $\sqrt[2]{a} - \sqrt[2]{b} + \sqrt[2]{c}$; & le Produit qui resultera de cette premiere Multiplication, savoir $\sqrt[2]{aff} - \sqrt[2]{bff} + \sqrt[2]{cff}$ devra derechef être multiplié par $\sqrt[2]{dd} - \sqrt[2]{4ac}$, & le Produit qui resultera de cette seconde Multiplication se divisera par le Monome e; ce qui est facile.

12. Mais si j'ai pour Trinome $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, afin de réduire ce Trinome en Binome, il faut le multiplier non seulement par $\sqrt[3]{aa} + \sqrt[3]{bb} + \sqrt[3]{cc}$,

mais outre cela à ces trois Termes il faut ajoûter trois Moïens Proportionels; ſavoir 1°. ab, Moïen Proportionel entre le premier & le ſecond terme, 2°. bc, Moïen Proportionel entre le ſecond & le troiſiéme Terme, 3°. ac, Moïen Proportionel entre le premier & le troiſiéme; de ſorte que le Multiplicateur ſera $\sqrt[3]{aa} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bb} - \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{cc} - \sqrt[3]{ac}$.

13. Il reſultera de là un Binome d'une 3e Puiſſance, que l'on réduira en Monome ſuivant la Méthode déja expliquée.

14. Si on a pour Trinome $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}$, le Multiplicateur qui devra changer ce Trinome en Binome, ſera non ſeulement compoſé de trois Quantitez $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c^3}$, mais de plus il faudra y joindre ſix Moïens Proportionels; de ſorte que le Multiplicateur ſera $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{aab} + \sqrt[4]{abb} - \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{bbc} - \sqrt[4]{ccb} + \sqrt[4]{c^3} - \sqrt[4]{aac} + \sqrt[4]{acc}$; il reſultera de là un Binome que l'on réduira en Monome, comme l'on a accoûtumé de réduire les Binomes de la 4e Puiſſance. Le Dividende ſe multipliera ſucceſſivement par le même Polynome qui aura ſervi à réduire le Trinome en Monome.

15. Si les Racines d'un Trinome appartenoient à la 5e Puiſſance, il faudroit neuf Moïens Proportionels. Si elles appartenoient à la 6e, il en faudroit 12; ſavoir 4 entre le premier & le ſecond Terme, 4 entre le ſecond & le troiſiéme, 4 entre le premier & le troiſiéme.

16. En multipl. le Quadrin. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ par $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}$ l'on aura pour Produit un Trinome dont les Ra-

Digitized by Google

cines ſeront de la ſeconde Puiſſance, que l'on réduira ſucceſſivement en Binome, puis en Monome.

17. Mais ſi l'on a pour Quadrinome $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}$, il faudra faire la Multiplication par $\sqrt[3]{aa} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bb} - \sqrt{bc} + \sqrt[3]{cc} - \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{dd} - \sqrt[3]{cd} + \sqrt[3]{ad} - \sqrt[3]{bd}$; c'eſt-à-dire, qu'il y aura un Moïen Proportionel entre le premier & le ſecond Terme, un entre le ſecond & le troiſiéme, un entre le premier & le troiſiéme, un entre le troiſiéme & le quatriéme.

18. Si l'on avoit le Quadrinome $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{d}$, la Multiplication ſe feroit par $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{aab} + \sqrt[4]{abb} - \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{bbc} - \sqrt[4]{bcc} + \sqrt[4]{c^3} - \sqrt[4]{aac} + \sqrt[4]{cca} - \sqrt[4]{ccd} + \sqrt[4]{cdd} - \sqrt[4]{d^3} + \sqrt[4]{aad} - \sqrt[4]{dda} + \sqrt[4]{bbd} - \sqrt[4]{ddb}$; c'eſt-à-dire, qu'il faudroit deux Moïens Proportionels entre le premier & le ſecond Terme, deux entre le ſecond & le troiſiéme, deux entre le premier & le troiſiéme, deux entre le premier & le quatriéme, deux entre le ſecond & le quatriéme, en tout 12.

19. Si le Quadrinome avoit appartenu à la 5e Puiſſance, il y auroit eu 18 Moïens Proportionels.

20. Quand un Polynome eſt compoſé de pluſieurs Racines appartenant à de differentes Puiſſances, il faut commencer par les réduire à la même Denomination.

21. Ces ſubtilitez ne ſont pas difficiles à apprendre, quand on a pouſſé la connoiſſance de l'Algebre juſques à la Section où nous ſommes & qu'on Remarque.

s'eſt rendu familieres les veritez demontrées dans les precedentes. De ſorte qu'on ne doit pas avoir regret à quelques heures que l'on donne à comprendre ces ſpeculations, ne fut-ce que pour en pouvoir juger. Du reſte, elles ſont fort éloignées d'être d'un aſſez grand uſage, pour meriter qu'on les pouſſe plus loin, quand on a tant de connoiſſances plus utiles à acquerir.

Cette réduction du Polynome au Monome eſt ingenieuſe, de même que l'élevation du Dividende pour devenir propre à être juſtement diviſé par le Polynome changé en Monome. Mais il eſt inconteſtable qu'après avoir achevé cette operation, ſur l'exemple du 18 Article, on auroit pour Quotient une Quantité Complexe, compoſée de tant de Parties Irrationelles, que, pour juſte qu'elle fût exprimée par des Signes qui lui conviendroient ſans équivoque, il ne ſeroit pas pourtant poſſible de ſe la repreſenter. Tout ce qu'on peut dire, c'eſt que ſi l'eſprit humain acqueroit aſſez d'étenduë pour pouvoir ſe repreſenter une Grandeur ſi multiple, ſi variée, ſi compoſée, il pourroit exprimer les idées qu'il en auroit par les Signes que cette Méthode fournit. Elle nous prête un langage précis, mais elle ne nous amene qu'à une idée très-confuſe de l'aſſemblage des parties qu'elle apprend à exprimer.

Remarque ſur la Multiplication.

22. La Multiplication des Racines Compoſées, lorſque les Membres, ſoit du Multiplié, ſoit du Multipliant, ſont ou tous ou en partie Incommenſurables, n'a plus de difficulté. L'on multiplie par ordre & l'un après l'autre, tous les Membres du Multiplié par chaque Membre du Multipliant, & après toutes ces Multiplications faites ſuivant les regles de la Multiplication d'une Racine ſim-

Digitized by Google

ple par une Racine ſimple, l'on ajoûte en une ſeule ſomme les Membres Commenſurables, quand il s'en trouve, & ceux qui étant Incommenſurables en eux-mêmes, ſont Commenſurables entr'eux.

Je dois multiplier $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

par $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

j'ai $5+\sqrt{15}+3$
$+\sqrt{15}$

ce qui vaut $8+2\sqrt{15}$, ou $8+\sqrt{60}$

23. Je vois dans cet Exemple que le Binome $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ multiplié par lui-même, forme le Quarré $8+\sqrt{60}$, lequel Quarré eſt auſſi un Binome, & pour m'aſſurer ſi le Quarré d'un Binome eſt toûjours Binome, je dreſſe la Formule generale Du Quarré d'un Binome.

$$\begin{array}{l}\sqrt{a}+\sqrt{b}\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\\ \hline a+\sqrt{ab}+b\\ +\sqrt{ab}\\ \hline a+2\sqrt{ab}+b=a+b+\sqrt{4ab}\end{array}$$

Et j'ai pour le Quarré le Binome $a+b+\sqrt{4ab}$, car je l'appelle Binome, puiſque $a+b$, tous deux Commenſurables connus, ſe rapportent à une ſeule ſomme, & que je puis toûjours dire $a+b=c$.

24. Pour ſavoir à combien de Membres montera le Cube d'un Binome quand il ſera réduit, je continuë encore ma Formule generale, & je multiplie le Quarré Du Cube.

$$a+b+\sqrt{4ab}$$

par la Rac. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{a}+\sqrt{4aab}+a\sqrt{b}+b\sqrt{b}+\sqrt{4abb}$$

Or $\sqrt{4aab}=a\sqrt{4b}$, ou $\sqrt{4aab}=2a\sqrt{b}$, & $\sqrt{4abb}=2b\sqrt{a}$.

J'ai donc ſix Produits, deſquels trois, ſavoir

$a\sqrt{a}$, $b\sqrt{a}$, $2b\sqrt{a}$, ſont Commenſurables entr'eux, puiſqu'ils contiennent tous la même Racine $\sqrt{a}$ multipliée par des Quantitez entierement Commenſurables. Ils s'ajoûteront donc dans un ſeul Membre.

Il en ſera de même des trois autres $b\sqrt{b}$, $a\sqrt{b}$, $2a\sqrt{b}$, qui ſe réduiront tous trois à un ſeul Membre; & ainſi le Cube d'un Binome ſera toûjours un Binome.

Des autres Puiſſances.

25. Puiſque le Quarré d'une Racine Binome eſt toûjours Binome, il s'enſuit que la 4e Puiſſan- d'un Binome ſera auſſi un Binome, parce que cette 4e Puiſſance eſt elle-même un Quarré qui a pour ſa Racine un Quarré, lequel nous venons de demonter Binome.

En continuant la Formule, & en la pouſſant, on ſe convaincra que chaque Puiſſance d'un Binome, eſt toûjours Binome.

$$\begin{array}{r} c+\sqrt{4ab} \\ c+\sqrt{4ab} \\ \hline cc+c\sqrt{4ab}+\sqrt{16aabb} \\ +c\sqrt{4ab} \\ \hline \end{array}$$

donne la Puiſſance $cc+2c\sqrt{4ab}+\sqrt{16aabb}$

Or $2c\sqrt{4ab}=\sqrt{16ccab}$, & $\sqrt{16aabb}=4ab$, qui eſt commenſurable; & ainſi je fais $cc+4ab=d$, & j'ai le Binome $d+\sqrt{16ccab}$, qui eſt une 4e Puiſſance; & cette 4e Puiſſance $d+\sqrt{16ccab}$, eſt la 4e Puiſſance de $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$. Multipliée par ſa Racine $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, elle donne $d\sqrt{a}+\sqrt{16ccaab}+d\sqrt{b}+\sqrt{16ccabb}$. Or $\sqrt{16ccabb}=4cb\sqrt{a}$, & $\sqrt{16ccaab}=4ca\sqrt{b}$.

26. J'ai $\sqrt[3]{b^3c^4e}-\sqrt[3]{d^6c^3ee}+\sqrt[3]{fggh^4}=A$. Que je dois diviſer par $\sqrt[3]{bb^3c^4}-\sqrt[3]{b^6k^3}=B$.

Si les Quantitez deſignées par les Lettres b, c, d,

&c. me ſont aſſez connuës pour les exprimer en Lignes, qui, par les differences de leurs longueurs, expriment les differens Rapports de ces Quantitez.

Je prens une Ligne plus petite que la plus petite de toutes ces Quantitez, & cette Ligne je la regarde comme l'Unité. Je l'appellerai i.

Je fais $\div\div i.\ b.\ bb.\ b^3$. La 4e Ligne de cette Progreſſion me donne b^3, & $\div\div bb.\ b^3.\ b^4.\ b^5.\ b^6$. J'ai b^6.

En faiſant $\div\div i.\ c.\ cc.\ c^3.\ c^4$. $\div\div i.\ d.\ dd.\ d^3.\ d^4.\ d^5$.

Puis $\div\div i.\ k.\ kk.\ k^3.\ k^4.\ k^5$, j'ai une Ligne qui exprime par ſa longueur, comparée à la longueur des autres, le Rapport de la Quantité deſignée par le Signe k^5, avec les autres Quantitez marquées chacune par ſon Signe.

Après cela j'ai une Ligne a, & je fais une ſuite de Proportionelles $\div\div i, a.\ aa, a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.\ a^9.\ a^{10}.\ a^{12}.\ a^{15}.\ a^{14}$, &c. La $\sqrt{}$ de a^7, c'eſt a.

Je fais donc $a^7.\ a :: b^6.\ \sqrt{}\ b^6.\ a^7.\ a :: k^5.\ \sqrt{}\ k^5$, & ainſi des autres.

Après cela je multiplie la Ligne b^3 par la Ligne e^4, & j'ai un Rectangle.

Je multiplie la Ligne e par celle que j'ai choiſie pour l'Unité; c'eſt-à-dire, par la Ligne (i) & j'ai auſſi un Rectangle.

Sur une Ligne égale à b^3, j'éleve un Rectangle égal au Rectangle $e \times i$. J'appelle ſa hauteur m, & j'ai $b^3 \times c^4.\ b \times e \times i = b^3 \times m :: c^4.\ m$.

Je parviendrai de même à un Rectangle qui exprimera par rapport à $c^4 \times m$, le Rapport de $b^3\ c^4\ e$, à $d^5\ c^1\ ee$.

Je trouverai encore deux Lignes qui exprimeront le Rapport de ces Rectangles. Qu'elles ſoient n & O.

J'aurai $b^3 c^4 e.\ d^5 c^3 e e :: n.\ O.$

Je ferai après cela $a a.\ a :: n.\ \sqrt[3]{n}$

$a^3\ a :: O.\ \sqrt[3]{}.\ O$

& j'aurai deux Lignes p & q, telles que $p.\ q :: :: \sqrt{b^3 c^4 e}.\ \sqrt[3]{d^5 c^3 e e}.$

Pour cet effet, après avoir pris une très-petite Ligne pour l'Unité, une tant soit peu plus grande pour a, je les placerai très-près l'une de l'autre.

Je prendrai sur une Ligne droite un très-grand nombre de très-petites distances égales à celle de la Ligne (i) à la Ligne (a).

Je chercherai les 3es Proportionelles $\div$ 1. $a.\ a a.$ $\div$ $a.\ a a.\ a^3$, &c. Je les placerai perpendiculairement par ordre sur chacun de mes points à distance égale.

Je tracerai une Courbe qui joindra leurs extremitez. Ce sera la Logarithmique.

Pour avoir la $\sqrt{}$ d'une Ligne donnée O, je placerai la Ligne O sur un des points de mon Axe, tel que l'extremité superieure de O parvienne à la Courbe.

Je partagerai en trois parties égales l'espace contenu entre l'Unité & ma Ligne O. Sur la premiere de mes Divisions, je trouverai une Perpendiculaire qui sera $\sqrt{O}$; car en l'appellant a, j'aurois $\div$ 1. $a.$ $a a.\ a^3$.

a^3 seroit égal à la Ligne O. Donc $a = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt{O}$.

Pour avoir une $\sqrt{}$, je partagerois l'espace en 7 parties égales. Car pour avoir la Racine d'une 3e Puissance, il faut avoir la premiere de deux Moïennes Proportionelles depuis l'Unité.

Pour avoir la Racine d'une 7e Puissance, il faut avoir la premiere de six Moïennes Proportionelles depuis l'Unité.

J'ôterai l'une de l'autre, restera la Ligne R, que

Digitized by Google

je mettrai à la place de $\sqrt[3]{b^3c^4e} - \sqrt[3]{d^5c^3ee}$, & je ferai le Rectangle $R \times 1$.

Je parviendrai enſuite à un Rectangle $f \times 1$, qui exprime le Rapport de $fggh^4$.

Ces deux derniers auront entr'eux le Rapport de R à f.

Je ferai $a^5 . a :: fggh^4 . \sqrt[5]{fggh^4} = Q$.

Je ferai $R + Q = T$.

Enſuite $\sqrt[3]{bh^3c^4} - \sqrt[3]{b^6k^3}$, s'exprimera par V.

Je ferai le Rectangle $T \times i$, & ce Rectangle $T \times i$ je le diviſerai par V.

Pour cet effet, je ferai $V \times x = T \times 1$. Donc $\frac{V \times x}{V} = \frac{T \times 1}{V}$.

CHAPITRE XVIII.

Des Racines Univerſelles.

1. ON appelle *Racine Univerſelle*, la Racine d'une Quantité Complexe compoſée d'une Puiſſance vraie ou fauſſe & d'une Racine.

La Grandeur Complexe dont il faut tirer la Racine Univerſelle, peut auſſi être compoſée d'une Racine & de la Racine d'une Racine.

Ainſi la Racine de $4 + \sqrt{9}$ eſt une Racine Univerſelle ; car c'eſt la Racine d'une Grandeur Complexe, compoſée de 4 & de $\sqrt{9}$; c'eſt-à-dire, de $4 + 3 = 7$.

Ainſi la Racine de $4 + \sqrt{25}$ eſt une Racine Univerſelle, c'eſt-à-dire c'eſt la Racine d'une Grandeur compoſée de 4 & de $\sqrt{25} = 5$; par conſequent c'eſt $\sqrt{9} = 3$, & c'eſt une vraie Racine exprimée

à la maniere des Racines Univerſelles. Ainſi encore $\sqrt{3+\sqrt{7}}$, c'eſt la Racine d'une Grandeur compoſée du Nombre 3 & de la Racine de 7 ; & en general, $\sqrt{b+\sqrt{c}}$, c'eſt la Racine d'une Grandeur compoſée de b & de la $\sqrt{c}$.

Naiſſance, uſage & définition.

2. Lorſque le Binome $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, eſt compoſé de deux Parties Incommenſurables, & chacune de la ſeconde Puiſſance, ſi l'on fait le Quarré de la ſomme $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, en multipliant ce Binome par lui-même, l'on aura $7+2=9+2\sqrt{14}$ $(=\sqrt{56})$; car $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}=2\sqrt{14}=\sqrt{4}\times\sqrt{14}=\sqrt{56}$; c'eſt-à-dire, que le Quarré de la $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, c'eſt $9+\sqrt{56}$. D'où il s'enſuit que la Racine du Quarré $9+\sqrt{56}$ égale juſtement $\sqrt{7}+\sqrt{2}$; de ſorte que c'eſt une maniere d'ajoûter le Binome $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ que de dire $\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{9+\sqrt{56}}$. Cela ſignifie que la Racine d'une ſomme compoſée du Nombre Rationel 9 & de $\sqrt{56}$ égale la ſomme du Binome $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, & en general, ſi l'on a $\sqrt{b}+\sqrt{c}$, l'on pourra les ajoûter ainſi. $\sqrt{b}+\sqrt{c}=b+c+2\sqrt{bc}$, ou en faiſant $b+c=d$ & $2\sqrt{bc}=\sqrt{4bc}$, il s'enſuivra que $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ égale $\sqrt{d+\sqrt{4bc}}$, ou la Racine de $d+\sqrt{4bc}$.

3. De même, ſi je devois ſouſtraire $\sqrt{2}$ de $\sqrt{7}$, je ferois le Quarré du Binome $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, & en multipliant ce Binome par lui-même, j'aurois pour Produit $7-2=5-2\sqrt{14}=\sqrt{56}$, c'eſt-à-dire $5-\sqrt{56}$.

Puis donc que $5-\sqrt{56}$ eſt le Quarré de l'Apotome $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, il s'enſuit que la Racine d'un

Quarré composé du Nombre Rationel 5 & de l'Irrationel $\sqrt{56}$, est précisément égale à la $\sqrt{7} - \sqrt{2}$. J'ai donc $\sqrt{7} - \sqrt{2} = \sqrt{5 - \sqrt{56}}$, & ce dernier assemblage contient la valeur $\sqrt{7}$, diminuée de $\sqrt{2}$. Et en general $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b - \sqrt{4ab}}$, & en faisant $a - b = c$, après avoir soustrait $\sqrt{b}$ de la $\sqrt{a}$, il restera $\sqrt{c - \sqrt{4ab}}$, c'est-à-dire la Racine d'une Quantité composée d'un Terme Rationel & de l'Irrationel $\sqrt{4ab}$.

4. L'on appelle ces Racines extraites d'un Composé, soit d'un Terme Rationel avec un Irrationel, soit de deux Irrationels : on les appelle, dis-je, *Racines Universelles* ou *Liées*, & l'on trace une Ligne le long de tous les Termes dont l'assemblage donne une seule Racine.

Quand donc je dis $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, je ne parle pas de deux Racines, mais d'une seule dont le Quarré est $a + \sqrt{b}$.

5. L'*Addition* des Racines Universelles ne se fait que par le Signe +, & la *Soustration* que par le Signe —, car elles sont Incommensurables entr'elles. Si je veux ajoûter $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ avec $\sqrt{c + \sqrt{d}}$, je ferai simplement $\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c + \sqrt{d}}}$. Addition & Soustraction.

Et si je devois soustraire la seconde de la premiere, j'écrirois $\sqrt{a + \sqrt{b} - \sqrt{c + \sqrt{d}}}$.

Dans l'Addition le Signe + & dans la Soustraction le Signe — se mettent au-devant de la Note Radicale ; & du reste l'on ne change rien aux autres Signes.

Par exemple, si au lieu de $\sqrt{c + \sqrt{d}}$, j'avois

$\sqrt{c-\sqrt{d}}$, l'Addit. donneroit $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c-\sqrt{d}}}}$ & la Souſtraction $\sqrt{a+\sqrt{b-\sqrt{c-\sqrt{d}}}}$. La raiſon de cela eſt que $c+\sqrt{d}$ eſt conſideré comme une ſeule Quantité; de ſorte que ſoit que je faſſe $c+\sqrt{d}=y$, ſoit que je faſſe $c-\sqrt{d}=z$, j'aurai $\sqrt{c+\sqrt{d}}=\sqrt{y}$, & $\sqrt{c-\sqrt{d}}=\sqrt{z}$. Or s'il faut ajoûter $\sqrt{y}$, j'écrirai $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{y}}}$, & s'il faut ſouſtraire $\sqrt{z}$, j'écrirai $\sqrt{a+\sqrt{b-\sqrt{z}}}$.

Je puis ajoûter, par le moïen du Signe $+$ la Racine d'une Quantité qui vaut $c-\sqrt{d}$, en mettant $+\sqrt{c-\sqrt{d}}$, & je puis ſouſtraire, par le moïen du Signe $-$, la Racine d'une Quantité qui vaut $c+\sqrt{d}$, en mettant $-\sqrt{c+\sqrt{d}}$.

Multiplication.

6. Quand on a à multiplier une Racine Univerſelle par elle-même, ſi elle appartient à la ſeconde Puiſſance, il n'y a qu'à retrancher le Signe Radical qui precede la ligature, & écrire le reſte tel qu'il ſe trouve, de quelque nature que ſoient les Puiſſances des Racines qui ſe trouvent ſous le Signe ſuperieur, qui eſt la ligne de liaiſon.

Par exemple, ſi je dois multiplier par elle-même $\sqrt[2]{5+\sqrt[3]{4+\sqrt[4]{7}}}$, je n'ai qu'à écrire pour Produit $5+\sqrt[3]{4+\sqrt[4]{7}}$.

La raiſon de cela eſt que la Somme compoſée de ces trois Termes $5+\sqrt[3]{4+\sqrt[4]{7}}$ eſt ſuppoſée un Quarré. Or la Racine d'un Quarré ſe multipliant par elle-même, produit préciſément le Quarré.

Faiſant $\sqrt[2]{5+\sqrt[3]{4+\sqrt[4]{7}}}=y$, $\sqrt[2]{5+\sqrt[3]{4+\sqrt[4]{7}}}$

ſera $= \sqrt[2]{y}$, c'eſt donc tout un de multiplier $\sqrt[2]{5} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{7}$ par elle-même, ou de multiplier $\sqrt[2]{y}$ par elle-même. Or en ce dernier cas l'on a pour Produit y, lequel $y = 5 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{7}$.

De même, ſi nous ſuppoſons $\sqrt{5} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{7} = z$, le Quarré de z devra ſe trouver égal au Quarré de cette Racine : par conſequent $zz = 5 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{7}$.

7. Mais quand le Signe Radical qui precede la Ligature, & qui eſt le Signe total de l'aſſemblage, appartient à une autre Puiſſance qu'à la ſeconde, il ne ſuffit pas d'effacer ce Signe Radical pour avoir le Produit d'une Racine Univerſelle multipliée par elle-même.

Par exemple, $\sqrt[3]{8}$, multipliée par elle-même, ne donne pas pour Produit 8, mais ſeulement 4; car $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{64} = 4$; & en general, $\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{a^3}$ donne non pas a^3, mais $\sqrt[3]{a^6} = aa$.

8. Il faut donc, dans ce cas, & dans tous les autres, où les Termes du Multipliant ne ſont pas les mêmes que ceux du Multiplié, ſuivre les regles generales de la Multiplication des Incommenſurables.

Par exemple, je dois multiplier $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$ par $\sqrt[2]{c} + \sqrt[2]{d}$

1°. Je multiplie a par c, & j'ai ac. 2°. Je multiplie $\sqrt[2]{b}$ par c, & pour faire cela, j'obſerve d'abord qu'il faut les réduire aux mêmes Denominateurs. Or puiſqu'il s'agit ici non ſimplement de la

Digitized by Google

Racine de b, mais de la Racine de $\sqrt[2]{b}$, je vois que b eſt conſideré comme un Quarré de Quarré, ou une 4e Puiſſance (car je puis faire $b = y^4$, & par conſequent $\sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{y^4} = yy$, d'où il s'enſuivra que la Racine de $\sqrt[2]{b}$ égalera $\sqrt[2]{yy} = y$). Puis donc que c eſt un Quarré, il faut que j'en faſſe un Quarré de Quarré, afin qu'il ſoit du même genre que b. Or c étant un Quarré, je le fais paſſer de la ſeconde Puiſſance à 4e en le multipliant par lui-même.

Ou ſi l'on regarde c comme une ſimple Quantité, puiſque b eſt un Quarré par rapport à lui, afin de multiplier le Quarré de b par c, il faudra élever c au même degré que b, afin de multiplier $\sqrt[2]{b}$ par $\sqrt[2]{c} = c$. J'ai donc pour ſecond Produit $\sqrt[2]{bcc}$.

3°. Je multiplie a par $\sqrt[2]{d}$, & en ſuivant les mêmes principes, j'aurai pour 3e Produit $\sqrt[2]{aad}$.

Enfin je multiplie $\sqrt[2]{b}$ par $\sqrt[2]{d}$, & j'ai $\sqrt[2]{bd}$. J'aurai donc pour Produit total

$$\sqrt[2]{ac} + \sqrt[2]{bcc} + \sqrt[2]{aad} + \sqrt[2]{bd}.$$

Pour multiplier la $\sqrt{5 + \sqrt{3}}$ par $\sqrt{6 + \sqrt{2}}$, je ſuppoſe que j'ai à multiplier le Binome $5 + \sqrt{3}$ par le Binome $6 + \sqrt{2}$, ce que j'execute ainſi

$$\begin{array}{l} 5 + \sqrt{3} \\ 6 + \sqrt{2} \\ \hline 30 + 6\sqrt{3} + \sqrt{6} \\ \quad + 5\sqrt{2} \\ \hline 30 + 5\sqrt{2}\ (=\sqrt{50}) + 6\sqrt{3}\ (=\sqrt{108}) + \sqrt{6} \end{array}$$

Mais comme je devois multiplier, non ces deux Binomes l'un par l'autre, mais leurs Racines, je mets au-devant du Produit le Signe Radical, & j'ai $\sqrt{30+\sqrt{50+\sqrt{108+\sqrt{6}}}}$; c'eſt-à-dire que le Produit eſt la Racine d'une Grandeur Complexe compoſée de quatre parties, dont l'une eſt le faux Quarré 30, & les autres les trois Racines ſuivantes.

9. Il peut arriver que les Membres de la Grandeur Complexe, en quoi conſiſte le Produit, ſeront de vraies Racines, & alors le Produit des deux Racines Univerſelles eſt compoſé en tout ou en partie, de Nombres Rationels. Par exemple, ſi je multipliois $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ par elle-même, Cas particulier.

$$\begin{array}{l}\sqrt{2+\sqrt{3}}\\ \hline \sqrt{4+2\sqrt{3}+\sqrt{9}}\\ \quad +2\sqrt{3}\\ \hline \sqrt{4+4\sqrt{3}\ (=\sqrt{48})+\sqrt{9}=3}\end{array}$$

c'eſt-à-dire, j'aurois le Binome $2+3=5+\sqrt{48}$ pour le Quarré de la Racine Univerſelle $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Si je multipliois $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ par $\sqrt{2+\sqrt{27}}$, j'aurois

$$\begin{array}{l}\sqrt{2+\sqrt{3}}\\ \sqrt{2+\sqrt{27}}\\ \hline \sqrt{4+2\sqrt{3}+\sqrt{81}}\\ \quad +2\sqrt{27}\\ \hline \sqrt{4\ (=2)+2\sqrt{27}+2\sqrt{3}+\sqrt{81}=9}\end{array}$$

c'eſt-à-dire $11+\sqrt{108}+\sqrt{12}$ pour Produit; & en faiſant $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$ & $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, j'aurai $\sqrt{108}+\sqrt{12}=8\sqrt{3}=\sqrt{192}$. J'aurai donc en tout le Binome $11+\sqrt{192}$ pour

Digitized by Google

Produit de ces deux Racines Univerſelles.

Si j'avois à multiplier la Racine de $\sqrt{6-\sqrt{2}}$ par la Racine de la $\sqrt{6+\sqrt{2}}$, ce qui s'exprime ainſi

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{6-\sqrt{2}} \\ \sqrt[4]{6+\sqrt{2}} \\ \hline 6+\sqrt{12}-\sqrt{4}=2 \\ -\sqrt{12} \\ \hline 6 \quad * \quad - \quad 2=4 \end{array}$$

J'ai donc pour Produit $\sqrt{4}=2$. On multiplie $\sqrt{6-\sqrt{2}}$ par $\sqrt{6+2}$, & au-devant on met $\sqrt{\ }$.

Autre cas. 10. Si le Multiplié avoit été $\sqrt[2]{a+\sqrt[3]{b}}$, afin d'en faire la Multiplication par $\sqrt[2]{c+\sqrt[2]{d}}$, 1°. j'aurois ac, 2°. je changerois c en $\sqrt[3]{c^3}$, pour avoir le ſecond Produit $\sqrt[3]{bc^3}$, 3°. j'aurois pour 3e Produit $\sqrt[4]{aad}$; & pour ce qui eſt du 4e, lequel doit reſulter de la Multiplication de la $\sqrt[3]{b}$ par $\sqrt[2]{d}$, afin de trouver ce Produit-là, il eſt préalablement neceſſaire de réduire la $\sqrt[3]{b}$ & $\sqrt[2]{d}$ aux mêmes Denominateurs. Puis donc qu'en multipliant leurs Expoſans l'un par l'autre, j'aurai 6, j'éleverai chaque Terme à la 6e Puiſſance, & je ferai $\sqrt[1]{b}=\sqrt[6]{b^3}$ (car b étant la 3e Puiſſance & valant y^3, Pour l'élever à la 6e & l'égaler à y^6, il

il n'y a qu'à écrire $b^2 = y^6$), & je ferai la $\sqrt[2]{d} = \sqrt[6]{d^3}$, par la même raiſon.

Je multiplie donc $\sqrt[6]{b^3}$ par $\sqrt[6]{d^3}$, & j'ai $\sqrt[6]{b^3 d^3}$; en tout $\sqrt[2]{ac} + \sqrt[1]{bc^3} + \sqrt[2]{aad} + \sqrt[6]{b^3 d^3}$, c'eſt-à-dire, la Racine 2e d'une Quantité compoſée de ces quatre Termes.

Il eſt vrai que s'agiſſant non ſimplement de la $\sqrt[1]{b}$, mais de la Racine Quarrée de ſa Racine 3e, b eſt conſideré comme une 6e Puiſſance, & comme y^6. Donc $\sqrt[1]{b} = \sqrt[1]{y^6} = yy$, qui eſt un Quarré, ayant pour ſa Racine y.

D'un autre côté, puiſqu'il s'agit non ſimplement de la Racine Quarrée de d, mais de la Racine Quarrée de cette Racine, il eſt de même manifeſte que d eſt conſideré comme une 4e Puiſſance, dont la Racine eſt un Quarré, de ſorte que $d = z^4$. Donc $\sqrt{d} = \sqrt{z^4}$, qui eſt zz, aïant pour ſa Racine z.

Mais il eſt vrai auſſi que ſi l'on compare les deux Quantitez b & d, non avec les Signes Radicaux de tout l'aſſemblage, mais ſimplement l'une avec l'autre, l'on peut regarder l'une comme Cube & l'autre ſimplement comme Quarré, car c'eſt là le rapport qu'elles ont entr'elles deux, la 6e Puiſſance étant un Cube par rapport à la 4e.

En general, donc puiſque le Signe general de l'aſſemblage total a baiſſé également les Puiſſances qui ſe trouvent ſous d'autres Signes, dans la ſuite de la Ligature, l'on peut les conſiderer l'une par rapport à l'autre comme des Puiſſances ſimplement répondantes à la nature de leur Signe, & en faire la multiplication ſur ce pié.

Exemple. 11. Si j'avois à multiplier la Racine de $\sqrt{4+\sqrt{5}}$ par 3, c'eſt-à-dire, ſi j'avois à multiplier la Racine d'une Grandeur compoſée de 4 & de $\sqrt{5}$ par le Nombre 3, il me faudroit changer ce Nombre 3 en une Racine & faire $3=\sqrt{9}$. Enſuite de cela ſi je multipliois le Binome $4+\sqrt{5}$ par $\sqrt{9}$, & au-devant du Produit je mettois le Signe Radical, j'aurois $\sqrt{4+\sqrt{5}}$

$\sqrt{9}$

$\overline{4\sqrt{9}+\sqrt{45}}$

c'eſt-à-dire j'aurois $\sqrt{144}=12+\sqrt{45}$.

Mais comme j'ai multiplié $\sqrt{5}$ par $\sqrt{9}$, pour avoir $\sqrt{45}$, cette Multiplication n'a pas été aſſez juſte, puiſque je ne multipliois pas la $\sqrt{5}$, mais la Racine de la $\sqrt{5}$. Voila pourquoi il ne ſuffit pas de changer ſimplement 3 en $\sqrt{9}$, mais il me faut changer 3 en Racine de $\sqrt{81}$, & alors j'aurai le Binome $12+\sqrt{405}$.

Pour multiplier une Racine par un Nombre entier, il faut ſe ſervir, au lieu de ce Nombre entier, d'une Racine qui lui ſoit équivalente & qui ſoit Racine d'une Racine. La Puiſſance 3 ſe trouvoit une Puiſſance 4e, par conſequent il a fallu ſe ſervir d'une Racine équivalente à 3, qui fût auſſi la Racine d'une 4e Puiſſance. Or on a une telle Racine dans la $\sqrt{3}$ élevée à la Puiſſance 4e, c'eſt-à-dire, dans la $\sqrt{81}$.

Ainſi encore ſi j'avois à multiplier $\sqrt{4-\sqrt{2}}$ par $1+\sqrt{2}$, il faudroit changer $1+\sqrt{2}$ en un Quarré, & lui prepoſer le Signe Radical. Je multiplie donc $1+\sqrt{2}$ par lui-même, & j'ai pour Produit $3+2\sqrt{2}$ $(=\sqrt{8})$. Je multiplie donc $\sqrt{4-\sqrt{2}}$ par la $\sqrt{3+\sqrt{8}}$.

Digitized by Google

$1 + \sqrt{2}$
$1 + \sqrt{2}$
$1 + 1\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{8}$
$+ 1\sqrt{2}$

Donc $1 + \sqrt{2} = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$
$\sqrt{4 - \sqrt{2}}$
$\sqrt{3 + \sqrt{8}}$
$\sqrt{12 - 3\sqrt{2} - \sqrt{16}} = 4$
$+ 4\sqrt{8}$
$\sqrt{12 + \sqrt{128} - \sqrt{18}} - 4 = \sqrt{8 + \sqrt{128} - \sqrt{18}}$

Et comme la $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ & que $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, en faisant la Soustraction $\sqrt{128} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$. Ainsi la Racine Universelle de $4 - \sqrt{2}$ multipliée par le Binome $1 + \sqrt{2}$, donne pour Produit la Racine Universelle de $8 + \sqrt{50}$.

12. Si je multiplios $\sqrt[3]{a + \sqrt[4]{b}}$ par $\sqrt[4]{c + \sqrt[5]{d}}$. Autre Exemple.

1°. Je considere qu'en faisant $a + \sqrt[4]{b} = y$, j'aurai $\sqrt[3]{a + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[3]{y}$.

Et si je fais $c + \sqrt[5]{d} = z$, j'aurai $\sqrt[4]{c + \sqrt[5]{d}} = \sqrt[4]{z}$.

Maintenant si j'avois à multiplier $\sqrt[3]{y}$ par $\sqrt[4]{z}$, il me faudroit 1°. les réduire aux mêmes Denominateurs & faire $\sqrt[3]{y} = \sqrt[12]{y^4}$, & $\sqrt[4]{z} = \sqrt[12]{z^3}$.

Cela étant, dans le Multiplié, au lieu du Signe Radical $\sqrt{}$, je mettrai $\sqrt[12]{}$, & j'éleverai $a + \sqrt[4]{b}$ de la 3e Puissance à la 12e.

Au lieu de a j'aurai donc a^4 (car a appartenant à la 3e Puissance, peut être considéré comme x. Or si l'on éleve x^3 de la 3e à la 12e Puissance, l'on aura x^{12}; mais si $a = x^3$, $a^4 = x^{12}$.)

Il faudra aussi élever $\sqrt[5]{b}$ à la même Puissance

12e, & écrire $\sqrt[4]{b^4}$ (car puiſqu'il s'agit non ſimplement de $\sqrt[4]{b}$, mais de la Racine 3e de cette Racine 4e, afin d'avoir ſous les yeux une Quantité dont la Racine 4e ait une Racine 3e, je fais $b = x^{12}$. La $\sqrt[4]{x^{12}}$, c'eſt x^3, qui a x pour Racine 3e. Maintenant, afin que la même Quantité x, qui eſt cette Racine 3e devienne Racine 12e, il faut au lieu de x^{12}, prendre x^{48}. La $\sqrt[4]{}$ de x^{48}, c'eſt x^{12}, qui a x pour Racine 12e. Or, ſi, quand je fais $b = x^{12}$, x ſe trouve $\sqrt[12]{}$ de la $\sqrt[4]{}$; lorſque je ferai $b^4 = x^{48}$, il s'enſuivra que pour conſerver la même valeur à $\sqrt[12]{}$ de $\sqrt[4]{b}$, qu'à la $\sqrt[3]{}$ de la même $\sqrt[4]{b}$, il faut élever b à une Puiſſance 4 fois plus haute, comme la Puiſſance x^{48} eſt 4 fois plus haute que la Puiſſance x^{12}, & par conſequent au lieu de $\sqrt[4]{b}$ écrire $\sqrt[4]{b^4}$, car ſi $b = x^{12}$, $b^4 = x^{48}$.)

Il faudra enſuite élever le Signe Radical du Multipliant, qui eſt $\sqrt[4]{}$ à $\sqrt[12]{}$, & par conſequent pour ne rien changer dans la valeur, il faudra élever tout ce qui eſt ſous ce Signe de la 4e Puiſſance à la 12e, & ainſi au lieu de la $\sqrt[4]{c + \sqrt[3]{d}}$, il faudra écrire $\sqrt[12]{c^3 + \sqrt[3]{d^3}}$.

Après ces preparations, je multiplierai, 1°. a^4 par $\sqrt[12]{c^3}$, j'aurai pour premier Produit $\sqrt[12]{a^4 c^3}$.

2°. Je multiplierai $\sqrt[4]{b^4}$ par c^3, & pour cet effet je changerai c^3 en $\sqrt[4]{c^{12}}$, & j'aurai pour ſecond Produit $\sqrt[4]{c^{12} b^4}$; car par rapport à c, b^4 eſt 4e Puiſſance, quoique par rapport au Signe Radical de toute la ſomme, il ſoit 12e Puiſſance. Il eſt, dis-je, 4e Puiſſance par rapport à c, puiſque c eſt 3e Puiſſance par rapport à ce Signe Radical commun.

Digitized by Google

3°. Je multiplie a^4 par $\sqrt[5]{d^1}$, c'eſt-à-dire, $\sqrt[5]{a^{20}}$ par $\sqrt[5]{d^1}$, & j'ai pour 3ᵉ Produit $\sqrt[5]{a^{20}d^1}$.

Enfin, je multiplie $\sqrt[4]{b^4}$ par $\sqrt[5]{d^1}$, & pour cet effet je les réduits, 1°. aux mêmes Denominateurs, ce qui me donne $\sqrt[4]{b^4} = \sqrt[20]{b^{20}}$ & $\sqrt[5]{d^1} = \sqrt[20]{d^{12}}$; Je multiplie donc $\sqrt[20]{b^{20}}$ par $\sqrt[20]{d^{12}}$, & j'ai pour 4ᵉ & dernier Produit $\sqrt[20]{b^{20}d^{12}}$.

Le Produit total ſera donc $\sqrt[12]{a^4c^3 + \sqrt[4]{b^4c^{12}} + \sqrt[5]{a^{20}d^3} + \sqrt[20]{b^{20}d^2}}$; c'eſt-à-dire, faites une Somme compoſée 1°. de a^4c^3, 2°. de la Racine 4ᵉ du ſecond Membre b^4c^{12} de la $\sqrt[5]{}$ du troiſiéme Membre $a^{20}d^3$, de la $\sqrt[20]{}$ du quatriéme Membre $b^{20}d^{12}$; après cela tirez la Racine 12ᵉ de cette Somme, vous aurez le Prod. de $\sqrt[3]{a + \sqrt[4]{b}} \times \sqrt[4]{c + \sqrt[5]{d}}$.

13. Pour diviſer une Racine Univerſelle par un Monome, il n'y a qu'à diviſer Puiſſance par Puiſſance, & conſerver au Quotient le Signe Radical. Diviſion.

Par exemple, pour diviſer $\sqrt[2]{12 + \sqrt[3]{8}}$ par $\sqrt[2]{3}$.

1°. Je diviſe 12 par 3, & j'ai pour Quotient 4.

2°. Je diviſe 8 par 3, & j'ai pour Quotient $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

3°. En prépoſant les Signes Radicaux, j'aurai pour Quotient $\sqrt[2]{4 + \sqrt{\frac{8}{3}}}$.

14. Quand on a une Racine Univerſelle à diviſer, ſi le Diviſeur eſt un Entier, il faudra ſe ſervir, au lieu de ce Diviſeur, d'une Racine équivalente, qui ſoit du même degré que la Racine.

Digitized by Google

Univerſelle que l'on doit diviſer.

Après cela l'on diviſera Puiſſance par Puiſſance, & l'on mettra au-devant du Quotient un Signe Radical, convenable aux Puiſſances avec leſquelles on a operé. Ainſi pour diviſer $\sqrt{12+\sqrt{48}}$ par 2, 1°. je fais $2=\sqrt{4}$, & par cette $\sqrt{4}$, 2°. je diviſe le premier Membre $\sqrt{12}$. 3°. J'éleve 2 à la 4ᵉ Puiſſance, & je fais $2=\sqrt{16}$, 4°. je diviſe $\sqrt{48}$ par $\sqrt{16}$, ce qui me donne pour Quotient $\sqrt{3}$. J'aurai donc pour Quotient entier $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, c'eſt-à-dire, la Racine d'une Grandeur compoſée de 3 & de la $\sqrt{3}$.

Quand le Diviſeur eſt un Polynome, avant que de faire la Diviſion, il faut changer ce Polynome en Monome, en le multipliant par ſon contraire. Il faut ſemblablement multiplier le Dividende par les mêmes Quantitez qui auront multiplié le Diviſeur.

Après quoi il faudra faire la Diviſion du Produit par le Monome trouvé.

15. Pour ajoûter en une Somme deux Racines Univerſelles, il faut qu'elles ſoient Commenſurables, par conſequent que l'une diviſe exactement l'autre; moïennant quoi on les ajoûte, comme on a coûtume d'ajoûter les ſimples Incommenſurables.

Ainſi en diviſant $\sqrt{12+\sqrt{48}}$ par $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, on a pour Quotient $\sqrt{4}=2$. Donc ajoûtant 1 à ce Quotient 2, l'on a 3, par lequel, ſi l'on multiplie le Diviſeur $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, on aura pour Produit $\sqrt{27+\sqrt{243}}$, ce qui me donne en 2 Termes la Somme $\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{12+\sqrt{48}}$.

Et pour ôter de $\sqrt{27+\sqrt{243}}$ la $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, après avoir fait la Diviſion, & trouvé pour Quotient 3, il en faut ôter 1, & par le reſte multi-

Digitized by Google

plier le Diviſeur, ce qui me donnera pour Produit $\sqrt{12} + \sqrt{48} = \sqrt{27} + \sqrt{243} = \sqrt{3} + \sqrt{3}$.

16. $a\sqrt[n]{b^q}\sqrt[p]{c^s}$ exprime la $\sqrt{}$ de la Grandeur $b^q \times \sqrt[p]{c^s}$, multipliée par a. Pour la réduire, je fais paſſer b ſous le Signe p, & j'ai $b^q \times \sqrt[p]{c^s} = \sqrt[p]{b^{pq} c^s}$. On a donc $\sqrt[n]{1} \times \sqrt[p]{b^{pq} c^s} = \sqrt[np]{b^{pq} c^s} = \sqrt[np]{1^p} \times \sqrt[p]{b^{pq} c^s}$. Pour la multiplier par a, on fait $a\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a^n} \times 1$. Formule generale.

Enſuite je fais $a = \sqrt[np]{a^p}$, & j'ai $\sqrt[np]{a^p b^{pq} c^s}$, dont la $\sqrt{}$ eſt $\sqrt[np]{a^p b^{pq} c^s}$.

Ce qui me paroît plus utile dans la Theorie des Incommenſurables, je crois l'avoir demontré fort clairement dans un des Diſcours que j'ai mis au-devant de mon Commentaire ſur l'Analyſe des Infiniment Petits.

Quand on a égalité entre des Incommenſurables, on peut faire évanoüir leur Incommenſurabilité.

J'ai $\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{b} + \sqrt[3]{c} - \sqrt[4]{d}$.

Je réduis les trois Membres de la ſeconde égalité aux mêmes Denominateurs, ou à la même eſpece de Puiſſance, & j'ai $\sqrt[2]{a} = \sqrt[12]{b^6} + \sqrt[12]{c^4} - \sqrt[12]{d^3} = \sqrt[12]{a^6}$. Donc $a^6 = \sqrt[12]{\sqrt[12]{b^6} + \sqrt[12]{c^4} - \sqrt[12]{d^3}}$.

CHAPITRE XIX.

De l'Extraction de la Racine Quarrée d'un Binome.

Preparation. 1. IL s'agit de trouver la Racine Quarrrée du Binome $c + \sqrt{d}$.

Pour cet effet je ſuppoſe que $c = aa + bb$, & que $\sqrt{d} = \sqrt{4aabb}$.

Cela étant, puiſque $\sqrt{4aabb} = 2ab$, il s'enſuivra que ſi $c + \sqrt{d} = aa + bb + \sqrt{4aabb}$, ce Binome $c + \sqrt{d} = aa + bb + 2ab$. Par conſequent $\sqrt{c + \sqrt{d}} = a + b$.

C'eſt à dire, qne toutes les fois que le premier Terme d'un Binome contiendra la Somme des Quarrez des deux Racines, & que le ſecond Terme égalera le double Produit d'une Racine par l'autre, pour avoir la Racine d'un tel Binome, il n'y aura qu'à partager le premier Terme en deux parties, telles que la Racine de l'une multipliée par l'autre, forme un Produit dont le double ſoit égal au ſecond Terme.

Application. 2. Pour venir à bout de partager ainſi le premier, je conſidere que ſi $c = aa + bb$, $cc = a^4 + b^4 + 2aabb$.

Or ſi de cette Somme j'ôte le Quarré $4aabb = d$, il me reſtera $a^4 + b^4 - 2aabb$. Ce Reſidu eſt juſtement le Quarré de $aa - bb$.

J'ai donc $cc - d = a^4 + b^4 - 2aabb$, & $\sqrt{cc - d} = aa - bb$. Et puiſque la moitié de

la Somme $aa + bb +$ la moitié de la difference $aa - bb$ donne la grande portion aa.

(Car ſoit $2g$ la grande partie & $2p$ la petite, du tout $2g + 2p$.

La difference de ces deux parties ſera $2g - 2p$, ſavoir le Reſidu de la grande, après en avoir ôté la petite.

Or ſi l'on prend la moitié de la Somme $2g + 2p$, on aura $g + p$.

Si on y joint la moitié de la difference $2g - 2p$, qui eſt $g - p$, on aura $g + p + g - p = 2g$ la grande portion.)

Ainſi $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = aa$; d'où il ſuit que $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{cc - d} = aa$. Et puiſque $\frac{1}{2}\sqrt{cc - d} = \sqrt{\frac{cc-d}{4}}$; $\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{cc-d}{4}} = aa$.

De même, $\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{cc-d}{4}} = bb$, (car ſi de $g + p$ on ſouſtrait $g - p$, on aura $\begin{matrix} g+p \\ -g+p \end{matrix} = 2p$.)

Par conſequent $\sqrt[2]{\frac{1}{2}c + \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}} = a$ & $\sqrt{\frac{1}{2}c - \sqrt[2]{\frac{cc-b}{4}}} = b$.

Si on quarre la Somme de ces deux Racines, on aura $aa + 2ab + bb = c + \sqrt[2]{d}$.

En effet le Quarré de la premiere, c'eſt $\frac{1}{2}c + \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}$, & le Quarré de la ſeconde, c'eſt $\frac{1}{2}c - \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}$. Or la Somme de ces deux Quar-

rez, c'eſt c; car ils ſont compoſez chacun de deux portions, dont les deux derniers ſe détruiſent.

Il n'y a plus qu'à multiplier ces deux Racines l'une par l'autre & doubler leur Produit.

$\frac{1}{2}c \times$ par $\frac{1}{2}c = \frac{1}{4}cc = \frac{cc}{4}$; ainſi la $\sqrt{\frac{1}{2}c} \times$ $\times \sqrt{\frac{1}{2}c} = \sqrt{\frac{cc}{4}}$.

Les Produits, l'un de $\frac{1}{2}c$ par $\sqrt{\frac{cc-d}{4}}$, l'autre de $\frac{1}{2}c$ par $-\sqrt{\frac{cc-d}{4}}$ ſe détruiſent reciproquement.

Reſte le Produit de $+\sqrt{\frac{cc-d}{4}}$ par $-\sqrt{\frac{cc-d}{4}}$ $= \sqrt{\frac{c^4 + dd - 2ccd}{16}} = \frac{cc-d}{4}$.

Le Produit total c'eſt donc $\sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{cc-d}{4}}$; c'eſt-à-dire, qu'il faut joindre en une ſomme $\frac{cc}{4}$ & $\frac{cc-d}{4}$, puis tirer la Racine de cette Somme, & l'on aura le Produit de la grande Racine par la petite. Or ſi l'on ôte de cc la Quantité $cc-d$, le Reſultat ſera $+d$; par conſequent $\sqrt[2]{\frac{d}{4}}$ eſt le Produit des deux Racines. Doublez ce Produit, vous aurez $2\sqrt[2]{\frac{d}{4}} = \sqrt[2]{\frac{4d}{4}} = \sqrt[2]{d}$.

Application à un Nombre quarré.

3. Exprimons le Quarré 36 ſous la forme du Binome $30 + \sqrt{36}$; puiſque $30 = c$ & $36 = d$, du Quarré $900 = cc$, j'ôte $36 = d$, le reſte $864 = cc - d$ Quarré de la difference des Quarrez qui compoſent la Somme $30 = a^4 + b^4 +$ $+ 2aabb$. Donc $\sqrt{864} = cc - d = aa - bb$,

Digitized by Google

difference des Quarrez qui compoſent la Somme 30.

Donc $15 + \sqrt{\frac{864}{4}} = 15 + \sqrt{216} = aa$ & $15 - \sqrt{216} = bb$. Par conſequent $\sqrt{15 + \sqrt{216}} = a$, & $\sqrt{15 - \sqrt{216}} = b$.

Que l'on quarre ces deux Racines, l'on aura $15 + \sqrt{216}$ pour le grand Quarré & $15 - \sqrt{216}$ pour le petit. Leur ſomme, c'eſt 30.

Le Produit de la grande Racine par la petite, c'eſt la Racine Univerſelle d'une Somme compoſée de la Quantité $15 \times 15 = 225$, & de la quantité Négative de $\sqrt{216} \times \sqrt{216} = 216$. C'eſt donc $\sqrt{225 - 216} = \sqrt{9} = 3$. Si l'on double ce Produit, l'on aura $6 = \sqrt[2]{36}$.

4, Pour tirer la Racine du Binome $20 + \sqrt[2]{12}$, 1°. J'ôte le Quarré 12 de 400, Quarré de 20. A un Binome Irrationel.

2°. Le reſte eſt le Quarré de la difference des Quarrez; par conſequent $\sqrt[2]{388}$, c'eſt la difference des deux Quarrez qui compoſent le grand Terme 20.

Donc 3°. je joindrai en une ſomme 10, moitié de 20 & $\frac{1}{2}\sqrt[2]{388}$ & j'ai $10 + \frac{1}{2}\sqrt{388}$ pour le grand Quarré, & pour le petit $10 - \frac{1}{2}\sqrt{388}$.

4°. J'aurai donc $\sqrt[2]{10 + \sqrt[2]{\frac{388}{4}}}$, ou $\sqrt{10 + \sqrt{97}}$ pour la grande Racine, & $\sqrt{10 - \sqrt{97}}$ pour la petite.

En effet, ſi l'on fait le Quarré de la ſomme de ces deux Racines, on aura, 1°. 20 pour la ſom-

Digitized by Google

me des deux Quarrez, répondans à $aa + bb$.

On aura, 2°. pour Produit des deux Racines, multipliées l'une par l'autre, la Racine Universelle d'une Somme composée de $100 - 97 = 3$: par conſequent le Plan de $\sqrt{10 + \sqrt{97}} \times 10 - \sqrt{97}$, c'eſt la $\sqrt{3}$.

Doublez ce Produit, vous aurez $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

5. Du même Principe, ſavoir que le *ſecond Terme* du Binome contient le double Plan des deux Racines, & le *premier* la Somme de leurs Quarrez; en ſorte que le *premier* répond toûjours à $aa + bb$, & *ſecond* à $\sqrt{4aabb} = 2ab$; de ce Principe, dis-je, l'on déduit une ſeconde Méthode de tirer la Racine Quarrée d'un Binome.

1°. Le $\frac{1}{4}$ du Quarré de $4aabb$, c'eſt $aabb$, & cette Quantité $aabb$ eſt juſtement le Produit des deux Quarrez aa & bb, multipliez l'un par l'autre.

Il ſuit de là 2°. que ſi l'on partage le premier Terme en deux parties, qui, multipliées l'une par l'autre, forment le ſecond, ces deux parties ſeront les deux Quarrez qui compoſent le premier Terme : la grande partie ſera le grand Quarré & la petite le petit Quarré : la Racine du premier ſera la grande Racine, & celle du ſecond la petite Racine.

Problême. 6. Il s'agit donc de demontrer la Méthode de partager un Nombre donné en deux portions dont le Produit ſoit un Nombre donné.

Il faut partager b en deux parties dont le Produit ſoit c. J'appelle 1°. l'une de ces parties x. Donc 2°. l'autre ſera $b - x$.

Digitized by Google

Cela étant, leur Produit $bx - xx = c$. Donc $bx = c + xx$. Donc $xx = bx - c$. Donc $xx - bx = -c$. Donc $xx - bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb - c$.

(Or $xx - bx + \frac{1}{4}bb$ eſt le Quarré de $x - \frac{b}{2}$

$x - \frac{b}{2}$

Multiplié par $x - \frac{b}{2}$

$xx - \frac{bx}{2} + \frac{bb}{4}$

$- \frac{bx}{2}$

Donnera $xx - \frac{2bx}{2} + \frac{bb}{4} = xx - bx + \frac{1}{4}bb$.)

Donc $x - \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{bb}{4} - c}$. Donc $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{bb}{4} - c}$.

C'eſt-à-dire qu'il faut, 1°. Prendre la moitié de la ſomme, ſavoir $\frac{1}{2}b$. 2°. Quarrer cette moitié, & on aura $\frac{bb}{4}$. 3°. Oter de ce Quarré le Nombre donné c. 4°. Tirer la Racine du Reſidu. 5°. Joindre à cette Racine la moitié de la ſomme donnée, ſavoir encore $\frac{1}{2}b$, & l'on aura une des portions. 6°. Pour avoir l'autre, il n'y a qu'à ſouſtraire cette portion trouvée de la Somme.

7. Il faut tirer la Racine du Binome $20 + \sqrt{12}$. Exemple.

Digitized by Google

1°. Je prens 10, moitié de 20. 2°. Je quarre 10 & j'ai 100. 3°. De ce Quarré j'ôte le quart du faux Quarré 12, & il me reſtera 97. A la $\sqrt{97}$ je joins 10. Ce qui étant fait, j'ai $10 + \sqrt{97}$ pour le grand Quarré qui compoſe 20; par conſequent $10 - \sqrt{97}$ pour le petit Quarré.

Donc $\sqrt{10 + \sqrt{97}}$ eſt la grande Racine & $\sqrt{10 - \sqrt{97}}$ eſt la petite Racine.

J'ôte le quart du faux Quarré 12, parce que $\sqrt{12}$, c'eſt le double du Produit de la grande Racine par la petite.

Donc $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ eſt le Produit de la grande Racine par la petite, répondant à $c = bx - xx$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{12} = \sqrt{\frac{12}{4}}$.

Second Exemple. 8. Pour extraire la Racine du Binome $\sqrt{18} - \sqrt{16}$. 1°. Il faut partager $\sqrt{18}$ en deux parties, qui, multipliées l'une par l'autre produiſent 4 qui eſt le quart de 16. Pour cet effet, 2°. Je prens $\frac{1}{2}\sqrt{18} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$. 3°. Je quarre cette $\sqrt{\frac{9}{2}}$ & j'ai $\frac{9}{2}$. 4°. J'en ôte $4 = \sqrt{16}$, reſte $\frac{1}{2}$. 5°. A $\sqrt{\frac{1}{2}}$ je joins la moitié de la ſomme des deux Racines $\sqrt{18} = \sqrt{\frac{18}{4}}$, & j'ai pour le grand Quarré $\sqrt{\frac{18}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, ou $3\sqrt{\frac{1}{2}} + 1\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$; ainſi $\sqrt{8}$ eſt le grand Quarré.

Si donc l'on ôte $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ de $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, reſtera $\sqrt{2}$ pour le petit Quarré.

On aura donc pour la grande Racine $\sqrt{8}$, & pour la petite $\sqrt{2}$.

Et comme l'on avoit pour *Binome*, ou pour mieux dire pour *Apotome*, $\sqrt{18} - \sqrt{16}$, les deux Racines de cet Apotome seront $\sqrt{8} - \sqrt{2}$.

Remarque. 9. Si au lieu de $\sqrt{18} - \sqrt{16}$, j'avois eu $\sqrt{18} + \sqrt{16}$, il est visible que la $\sqrt{18}$ auroit été la somme des deux Quarrez; car soit que le Plan $2ab$ soit précedé du Signe + ou du Signe —, la somme des Quarrez est toûjours $aa + bb$. Mais en ce cas, les deux Racines seroient toutes deux Positives; au lieu que dans l'autre, il faut que l'une soit Négative; car si j'ai $\sqrt{8} - \sqrt{2}$, le second Terme sera $-\sqrt{16}$; au lieu que si j'ai $\sqrt{8} + \sqrt{2}$, le second Terme sera $\sqrt{16}$.

Troisiéme Exemple. 10. Si l'on se sert de la premiere Méthode pour tirer la Racine du Binome $\sqrt{18} + \sqrt{16}$, 1°. On ôtera le Quarré 16 du Quarré 18, & l'on aura pour residu 2. Donc 2°. la $\sqrt{2}$ est la difference des Quarrez qui composent le premier Terme $\sqrt{18}$. Donc 3°. $\frac{1}{2}\sqrt{18} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(= \sqrt{\frac{18}{4}} + \sqrt{\frac{2}{4}}\right) =$

$= \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \left(= 3\sqrt{\frac{1}{2}} + 1\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 4\sqrt{\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{16}{2}} = \sqrt{8}$, est le plus grand Quarré.

Si l'on ôte cette $\sqrt{8}$ de la $\sqrt{18}$; c'est-à-dire, $2\sqrt{\frac{1}{2}}$ de $3\sqrt{\frac{1}{2}}$, restera la $\sqrt{\frac{1}{2}}$ pour le petit Quarré.

L'on aura donc pour grande Racine $\sqrt[4]{8}$ & pour petite $\sqrt[4]{2}$, parce qu'on a cherché non simplement $\sqrt{}$ de $18 - \sqrt{16}$, mais de $\sqrt{18} - \sqrt{16}$, on a donc cherché la Racine d'une Racine.

11. Il eſt viſible que la petite Racine du Binome $\sqrt{25} + \sqrt{9}$, c'eſt $\sqrt{8}$, comme la Racine de l'Apotome $\sqrt{25} - \sqrt{9}$, c'eſt $\sqrt{2}$.

J'ôte le quart du faux Quarré 12, parce que $\sqrt{12}$ eſt le double du Produit de la grande Racine par la petite.

Donc $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ eſt le Produit de la grande Racine par la petite, répondant à $c = bx - xx$.

Or $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{12} = \sqrt{\frac{12}{4}}$.

Quatriéme Exemple.

Pour les trouver, je les cherche ainſi ſuivant la ſeconde Méthode.

A la $\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$, j'ajoûte la moitié du premier Terme; c'eſt-à-dire, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, ce qui me donne $\frac{9}{2}$ pour le grand Quarré, & $\frac{1}{2}$ pour le petit.

J'aurai donc $\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ pour les deux Racines du Binome.

Et j'aurai $\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ pour les deux Racines de l'Apotome.

Les deux Quarrez ſeront toûjours l'un $\frac{9}{2}$, l'autre $\frac{1}{2}$; par conſequent leur ſomme $\frac{10}{2} = 5 = \sqrt{25}$.

Mais lorſque les deux Racines ſeront poſitives, leur Produit ſera $+\sqrt{\frac{9}{4}}$, & le double de ce Produit ſera $+2\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = +\sqrt{9}$.

Au

Au lieu que, ſi l'une eſt Negative, leur Produit donnera $-\sqrt[2]{\frac{9}{4}}$, & le double de ce Produit ſera $-2\sqrt{9}$.

Si au lieu des deux Quarrez $\frac{9}{2}$ & $\frac{1}{2}$, l'on veut ſubſtituer des Quantitez precedées du Signe Radical, l'on fera $\frac{9}{2} = \sqrt[2]{\frac{81}{4}}$ & $\frac{1}{2} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}}$, leur Somme ſera $9\sqrt[2]{\frac{1}{4}} + 1\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = 10\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \sqrt[2]{\frac{100}{4}} = 2\sqrt{25}$.

La grande Racine ſera $\sqrt[2]{\frac{81}{4}}$ & la petite $\sqrt[2]{\frac{1}{4}}$.

Suivant la premiere Méthode, l'on ôteroit le Quarré 9 du Quarré 25 : puis l'on joindroit à la moitié du premier Terme, la moitié de la Racine du Reſidu 16, pour avoir $\sqrt[2]{\frac{25}{4}} + \sqrt[2]{\frac{16}{4}} = 5\sqrt[2]{\frac{1}{4}} + 4\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = 9\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \sqrt[2]{\frac{81}{4}}$ pour le grand Quarré, & en ôtant ce grand Quarré de $\sqrt[2]{25} = \sqrt[2]{\frac{100}{4}} = 10\sqrt[2]{\frac{1}{4}}$, l'on aura pour le Reſidu & pour le petit Quarré $\sqrt[2]{\frac{1}{4}}$.

12. J'exprimerai cette ſeconde Méthode en Lettres, pour en faire une *Formule* generale. Formule generale.

Il faut tirer la Racine du Binome $c + \sqrt{d}$.

Le premier Terme c contient la Somme des deux Quarrez, & le ſecond Terme $\sqrt{d}$ contient un double Produit de leurs Racines.

$c = aa + bb$ & $\sqrt{d} = \sqrt{4aabb} = 2ab$.

Digitized by Google

On voit par là que le $\frac{1}{4}$ de $d = \frac{d}{4} = \frac{1}{4}\,4aabb$, c'eſt-à-dire que $\frac{d}{4} = aabb$.

On partagera c en deux parties, qui, multipliées l'une par l'autre, produiſent $\frac{d}{4}$. Si l'on a pour la premiere $\sqrt{\frac{cc-d}{4}} + \frac{1}{2}c$, ce ſera le grand Quarré répondant au Quarré aa.

Pour avoir le petit Quarré répondant à bb, il faut ôter cette Somme du Terme c, & l'on aura $c - \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{cc-d}{4}} = \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{cc-d}{4}}$, ce qui eſt la même *Formule* que donne la premiere Méthode.

$$\frac{\frac{c}{2} + \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}}{\frac{c}{2} - \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}}$$

$$\frac{cc}{4} + \frac{c}{2}\sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}} - c\sqrt{\frac{cc-d}{4}} - \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}\,x +$$

$$+ \sqrt[2]{\frac{cc-d}{4}}\left(= -\sqrt[2]{\frac{c^4 - 2ccd + dd}{16}}\right) = \frac{cc-d}{4}$$

Il faut mettre cette Racine $\frac{cc-d}{4}$ ſous le Signe $-$, on aura $-\frac{cc+d}{4}$; on aura donc $\frac{cc}{4} - \frac{cc}{4} +$

$$+ \frac{d}{4} = \frac{d}{4}.$$

Demonſtration generale exprimée en

13. Quand on a le Quarré $aa + bb + 2ab$, ſi l'on quarre la Somme des deux Quarrez $aa + bb$, qui ſera $a^4 + b^4 + 2aabb$, & que, de ce Quarré

l'on ôte le Quarré de $2ab$, qui eſt $4aabb$, le Reſidu $a^4 + b^4 - 2aabb$, ſe trouve le Quarré de $aa - bb$. Quantitez Commenſurables.

Cette Racine $aa - bb$ ajoûtée à la Somme $aa + bb$, donne $2aa$ le double du grand Quarré, & ôtée de cette même Somme $aa + bb$, donne $2bb$ le double du petit Quarré. Que l'on prenne donc la moitié de chacun de ces reſultats, l'on aura d'un côté aa, dont la Racine eſt a, & de l'autre bb, dont la Racine eſt b; par conſequent l'on aura $a + b$ pour la Racine du Quarré propoſé.

Et ſi ce Quarré avoit été $aa + bb - 2ab$, par cette Méthode, l'on auroit trouvé pour ſa Racine $a - b$.

Donc, pour avoir la Racine d'un Binome, 1°. Il faut quarrer ſes deux Termes. 2°. Oter le ſecond Quarré du premier. 3°. Tirer la Racine quarrée du Reſidu. 4°. Ajoûter cette Racine au premier Terme. 5°. Prendre la moitié de cette Somme. 6°. Tirer la Racine quarrée de cette moitié, & l'on aura la premiere Racine du Binome. 7°. En retranchant du premier Terme la Racine quarrée du Reſidu dont il eſt parlé au Nombre 3e, l'on aura le double du ſecond Quarré. 8°. Il en faudra donc prendre la moitié; puis, 9°. tirer la Racine quarrée de cette moitié, & l'on aura la ſeconde Racine.

L'on joindra la ſeconde à la premiere par le Signe +, ſi le ſecond Terme du Binome eſt poſitif, & par le Signe —, s'il eſt négatif, parce que lorſque le Plan des deux Racines eſt négatif, il y en a une de négative.

14. Soit $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = f + \sqrt{g}$. Application de la Demonſtration aux Incommenſurables.

Donc $ff + 2f\sqrt{g} + g = 7 + \sqrt{48}$.

$ff + g = 7$. $2f\sqrt{g} = \sqrt{48}$. Donc $f^4 + 2ffg + gg = 49$ & $4ffg = 48$.

Digitized by Google

D. $f^4 + 2ffgg + gg = f^4 - 2ffg + gg = 49 - 48 = 1$.
$- 4ffg$

Donc $ff - g = \sqrt{1} = 1$. Donc $g = ff - 1$.

Or $g + ff = 7$. D. $ff - 1 + ff = 7$. D. $2ff - 1 = 7$. D. $2ff = 8$. D. $ff = 4$. D. $f = 2$. & $g = ff - 1 = 4 - 1 = 3$. D. $\sqrt{g} = \sqrt{3}$.

Donc $\sqrt[2]{7 + \sqrt{48}} = 2 + \sqrt[2]{3}$.

En effet, $2 + \sqrt[2]{3}$

mult. par $2 + \sqrt{3}$

donne $4 + 2\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{3 \times 16} = 7 + \sqrt{48}$.
$+ 2\sqrt{3}$

Des Trinomes. 15. Si j'avois le Trinome $5 + 3\sqrt{2} - \sqrt{4} - 2\sqrt{3}$, je regarderois les deux premiers comme un seul Terme.

Je quarrerois donc $5 + 3\sqrt{2} = 5 + \sqrt{18}$

$5 + \sqrt{18}$

Et j'aurois $25 + 10\sqrt{18} + 18 = 43 + \sqrt{1800}$.

Le Quarré du second Terme est $4 + \sqrt{12}$.

Je fais la Souſtraction $4 + \sqrt{12}$;

Il me reſte $39 + \sqrt{1800} - \sqrt{12}$

J'ai $\sqrt{39 + \sqrt{1800} - \sqrt{12}}$. Je l'ajoûte à $5 + \sqrt{18}$. Je prens la moitié de la Somme, & j'ai $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{18} + \sqrt{39 + \sqrt{1800} - \sqrt{12}}}{2}}$ pour la Grande Racine.

Et la petite ſera $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{18} - \sqrt{39 + \sqrt{1800} - \sqrt{12}}}{2}}$.

Digitized by Google

CHAPITRE XX.

Theoremes qui dépendent de la formation des Puiſſances.

JE me ſuis propoſé dans cette Section de donner, en comparant les Puiſſances des Binomes & des Apotomes, en les multipliant & en les diviſant ; je me ſuis, dis-je, propoſé de donner des Exemples, par la pratique deſquels on ſe formera, à dreſſer des Theoremes, à découvrir des Reſultats, & à voir ſi des Problêmes propoſez ſont poſſibles, & à quoi ils aboutiſſent.

Tout le ſecond Livre d'Euclide ſe demontre aiſément par cette Méthode.

En s'y rendant attentif, on ſentira cette verité, que les Expreſſions Algebriques, ſont des Expreſſions de nos idées, tout comme les mots : mais plus abregées ; & que ce qui reſulte de leurs aſſemblages & de leurs poſitions, ſont des concluſions qui naiſſent tout comme celles de nos raiſonnemens ordinaires, à la longueur près.

1. La Somme compoſée du Quarré de deux Termes & du Quarré de leurs differences, eſt égale à deux fois le Quarré du premier Terme, & deux fois le Quarré du ſecond.

Ou ſi l'on double le Quarré du premier Terme & le Quarré du ſecond Terme, l'on aura en une autre Somme le Quarré du Binome & le Quarré de l'Apotome.

Ajoûtez $aa + 2ab + bb$
avec $aa - 2ab + bb$
vous aurez $2aa + 2bb$

Digitized by Google

2. Mais si du Quarré du Binome l'on ôte le Quarré de l'Apotome, restera 4 fois le Plan des deux Racines.

De $aa + 2ab + bb$
ôtez $aa - 2ab + bb$
restera $+ 4ab$

3. Si l'on multiplie le Binome par l'Apotome, l'on aura pour Produit le Quarré du premier Terme moins le Quarré du second. $a + b \times a - b = aa + ab - bb = aa - bb$.
$- ab$

4. Si l'on ajoûte le Cube du Binome avec le Cube de l'Apotome, la Somme totale sera deux fois le Cube du premier Terme + six Solides du Quarré du second Terme, multipliez par le premier Terme.

Ajoûtez $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$
avec $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$
vous aurez $2a^3 + 6abb$

5. Mais, si, du Cube du Binome, l'on retranche le Cube de l'Apotome, resteront 6 Solides du Quarré du premier Terme multiplié par le second Terme + 2 fois le Cube du second Terme.

De $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$
ôtez $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$
restera $6aab + 2b^3$

6. La 4e Puissance du Binome ajoûté avec la 4e Puissance de l'Apotome, donne pour Produit total deux fois la 4e Puissance du premier Terme + 12 fois le Produit du premier Quarré par le second + 2 fois la 4e Puissance du second Terme.

Ajoûtez $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$
avec $a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$
vous aurez $2a^4 + 12aabb + 2b^4$

Digitized by Google

7. Mais ſi vous retranchez la 4e Puiſſance de l'Apotome de la 4e Puiſſance du Binome, reſtera 8 fois le Produit du Cube du premier Terme par le ſecond Terme + 8 fois le Produit du Cube du ſecond Terme par le premier Terme.

Si de $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$
vous ôtez $a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$
reſtera $8a^3b \qquad + 8ab^3$

8. Si l'on multiplie le Quarré du premier Terme, le Quarré du ſecond & le Produit du premier Terme par le ſecond, ſi, dis-je, l'on multiplie ces trois Plans par l'Apotome; c'eſt-à-dire, par le premier Terme moins le ſecond, le Produit ſera égal à la difference des Cubes des deux Termes; c'eſt-à-dire, au Cube du premier Terme moins le Cube du ſecond.

Multipliez $aa + ab + bb$
par $a - b$
vous aurez $a^3 + aab + abb$
$- aab - abb - b^3$
$a^3 \qquad - b^3$

9. Donc ſi l'on diviſe la Difference des Cubes par les trois Plans qui compoſent le Quarré du Binome, non compris les Coëfficiens, l'on aura pour Quotient l'Apotome; c'eſt-à-dire, la Difference des Racines, ou la premiere Racine moins la ſeconde; car la Diviſion défait préciſément ce que la Multiplication a fait.

10. Et ſi l'on diviſe la Difference des Cubes par la Difference des Racines, l'on aura pour Quotient les 3 Plans qui compoſent le Quarré du Binome.

11. Si l'on multiplie les trois Plans qui compoſent le Quarré de l'Apotome par le Binome, le Produit ſera la Somme des Cubes.

Digitized by Google

Multipliez $aa - ab + bb$
par $a + b$
vous aurez $a^3 - aab + abb$
$+ aab - abb + b^3$
$a^3 \qquad + b^3$

12. Donc si l'on divise la Somme des Cubes par la Somme des Racines, on aura pour Quotient les trois Plans qui composent le Quarré de l'Apotome.

13. Et si l'on divise la Somme des Cubes par ces trois Plans, on aura pour Quotient le Binome, ou la Somme des deux Racines.

14. Si l'on multiplie le Cube du Binome par la Difference des Racines, on aura pour Produit la 4e Puissance du premier Terme, moins la 4e Puissance du second.

Multipliez $a^3 + aab + abb + b^3$
par $a - b$
vous aurez $a^4 + a^3 b + aabb + ab^3$
$- a^3 b - aabb - ab^3 - b^4$
$a^4 \qquad - b^4$

15. Donc si l'on divise la Difference des deux Termes élevez chacun à la 4e Puissance par la Difference de ces deux Termes, on aura pour Quotient les quatre Produits qui composent le Cube des deux Termes.

16. Si l'on multiplie les quatre Produits qui composent le Cube de l'Apotome, par le Binome, on aura pour Produit, comme ci-devant, la Difference des deux Termes, élevez chacun à la 4e Puissance.

Multipliez $a^3 - aab + abb - b^3$
par $a + b$
vous aurez $a^4 - a^3 b + aabb - ab^3$
$+ a^3 b - aabb + ab^3 - b^4$
$a^4 \qquad - b^4$

Digitized by Google

17. Donc la Difference des quatriémes Puiſſances, diviſées par la Somme des Racines, donne pour Quotient les quatre Solides qui compoſent le Cube de l'Apotome.

Et cette même Difference, diviſée par les quatre Solides qui compoſent le Cube de l'Apotome, donne pour Quotient la Somme des Racines.

18. Comme la Somme des deux Racines eſt à leur Difference, ainſi les quatre Solides qui compoſent le Cube du Binome, aux quatre Solides qui compoſent le Cube de l'Apotome.

$a+b.\ a-b :: a^3+aab+abb+b^3.\ a^3-aab+abb-b^3.$

Car le Produit des deux Extrêmes eſt égal au Produit des deux Moïens; ſavoir, a^4-b^4.

19. En general, ſi l'on multiplie les Produits qui compoſent une Puiſſance par la Difference des deux Racines de cette Puiſſance, on aura pour Produit la Difference de ces deux Racines élevées à la Puiſſance de l'ordre immédiatement ſuperieur.

Par conſequent la Difference des deux Puiſſances diviſées par la Difference des Racines, donne pour Quotient les Produits qui compoſent la Puiſſance immédiatement inferieure.

Et ſi la Difference des deux Puiſſances ſe diviſe par les Produits qui compoſent la Puiſſance immédiatement inferieure, on aura pour Quotient la Difference des Racines.

20. Quand les Produits qui compoſent une Puiſſance d'un Apotome ſont impairs, ſi on les multiplie par la Somme des Racines; c'eſt-à-dire, par le Binome, on aura pour Produit les deux Racines élevées chacune à la Puiſſance immédiatement ſuperieure.

Mais ſi le nombre des Produits qui compoſent la Puiſſance d'un Apotome, eſt un Nombre pair, en les multipliant par la Somme des Racines, on au-

Digitized by Google

ra pour Produit la Difference des deux Racines, élevées chacune à la Puiſſance imméd. ſuperieure.

21. Soit que l'on diviſe la Somme, ou la Difference de deux Racines, élevées chacune à une certaine Puiſſance, par la Somme des Racines, l'on aura toûjours pour Quotient les Produits qui compoſent l'Apotome, élevé à une Puiſſance immédiatement inferieure.

22. Lorſque les Quantitez qui compoſent la Puiſſance d'un Binome, ou la Puiſſance d'un Apotome, ſont en nombre pair, comme la Difference des Racines eſt à la Somme des Racines; ainſi les Quantitez qui compoſent la Puiſſance de l'Apotome, aux Quantitez qui compoſent la Puiſſance du Binome.

23. La Difference de deux Puiſſances du même degré, eſt exactement diviſible par la Difference de leurs Côtez.

24. La Somme de deux Puiſſances du même degré, eſt exactement diviſible par la Somme de leurs Côtez, lorſque l'Expoſant commun à ces deux Puiſſances eſt un Nombre impair.

25. Mais ſi l'Expoſant de ces deux Puiſſances eſt un Nombre pair, la Somme de leurs Côtez ſera le Diviſeur exact, non de la Somme des deux Puiſſances, mais de leur Difference.

Tout cela a été prouvé en détail dans les Articles précedens. Les expreſſions Litterales ſont univerſelles; & ſi on ſe rend attentif à la maniere de les calculer & de les placer, on verra que cette maniere enferme un raiſonnement très-diſtinct & très-demonſtratif.

Quand je dis $a \times b$, c'eſt comme ſi je diſois la Premiere Racine multipliée par la Seconde.

26. Sur ce fondement, l'on peut dreſſer une Table qui contiendra les Diviſeurs contraires de chaque Puiſſance.

Digitized by Google

CHAPITRE XXI.

Des Equations du ſecond degré.

Maniere d'abaiſſer les *Quadratiques.*

1. LOrſque les trois Membres d'une Equation ſont ſucceſſivement élevez à des Puiſſances dont les Expoſans ſe ſuivent en Progreſſion Arithmetique, ces Equations ſont appellées *Quadratiques*; car à quelque Puiſſance que leurs trois Membres ſoient élevez, ſi leurs Expoſans ſont tels que je viens de le dire, on peut les réduire à de plus petits Termes, ſans changer leur valeur en les diviſant tous par une Puiſſance d'une même dimenſion.

Si j'ai $a^4 + ba^3 - zzaa = 0$, ou $a^4 + ba^3 = zzaa$, comme les Expoſans de ces trois Quantitez ſont 4, 3, 2, qui ſont en Progreſſion Arithmetique, je puis, en diviſant chaque Membre par aa, la réduire à celle-ci $aa + ba = zz$.

De même encore, ſi j'ai $a^5 + bba^3 = z^4 a$, les Expoſans ſont 5, 3 & 1. En diviſant le tout par a, j'aurois $a^4 + bbaa = z^4$, les Expoſans ſont 4, 2, 0, & la premiere Quantité ſe conſidere comme un Quarré, car en effet c'en eſt un.

Proprietez fondamentales.

2. Dans une Equation Quadratique, la 3e Quantité eſt une Quantité connuë; mais cette Quantité connuë peut être conſiderée comme Produit de deux Quantitez dont on appellera la Grande g, la Petite p. Je le prouve. Que j'aye $xx - cx = a$.

1°. Il eſt inconteſtable que toute Quantité peut être conſiderée comme un Produit de deux Quantitez multipliées l'une par l'autre, 7 eſt le Produit

de $3 * 2\frac{1}{3} = 3 * \frac{7}{3}$, & ainſi de toute autre.

J'appellerai donc le Multiplié g, & le Multipliant p; g marquera la Grande Quantité, & p la Petite.

La premiere des deux autres Quantitez eſt un Quarré inconnu, & l'autre un Produit de la Racine inconnuë par un *Coëfficient* connu, lequel Coëfficient eſt égal à la Somme des deux Racines cherchées, ou à leur Difference. C'eſt ce qu'on va voir; mais je me conduirai, comme ſi j'avois à découvrir cette verité, & que juſqu'ici elle n'eût pas été connuë.

Quatre eſpeces d'Equations.

3. Les Equations (ou les manieres d'égaler) dans leſquelles l'on place d'un côté une Quantité Connuë, & de l'autre une Quantité Inconnuë, plus ou moins, le Produit de ſa Racine Inconnuë, par un Coëfficient; ces Equations, dis-je, peuvent être de quatre ſortes; car le Quarré eſt une Grandeur poſitive, ou une Grandeur négative, & dans chacun de ces cas il peut être ſuivi d'un Produit Poſitif, ou d'un Produit Négatif, & on aura donc

$$\begin{cases} xx + cx = b \\ xx - cx = b \\ -xx + cx = b \\ -xx - cx = b \end{cases}$$

Mais comme un Quarré ne peut être affecté du Signe —, les deux dernieres eſpeces ne peuvent avoir lieu.

Il y en a pourtant de quatre eſpeces, & voici comment cela ſe découvre.

Puiſque $xx + cx = b$, il ſuit que $xx + cx - b = 0$.

Puiſque $xx - cx = b$, il ſuit que $xx - cx - b = 0$.

Dans ces deux cas la Quantité b eſt ſuppoſée Poſitive; mais ſi on la ſuppoſoit Négative, l'on auroit

$xx + cx = -b$. Donc $xx + cx + b = 0$.
$xx - cx = -b$. Donc $xx - cx + b = 0$.

4. J'examinerai d'abord l'Equation $xx - cx +$ Examen de la premiere.
$+ b = 0$, ou $xx - cx = -b$, parce que ſes deux Racines ſont toutes deux Poſitives.

Si l'on acheve le Quarré du premier Membre, on aura $xx - cx + \frac{1}{4}cc = -b + \frac{1}{4}cc$. Donc $x - \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{4}cc - b}$. Donc $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc - b} + \frac{1}{2}c$.

Si $b = 21$, & $c = 10$, on aura $x = \sqrt{\frac{1}{4}100 - 21} + 5 = 2 + 5 = 7$.

Et l'on auroit $xx\,(=49) - cx\,(=-70) = -21$.

Mais comme l'on peut auſſi avoir $9 - 30 = -21$, & par conſequent $xx = 9$, & $x = 3$; il eſt neceſſaire de faire $2 - 5 = -3$, & par conſequent $x = 5 - \sqrt{\frac{1}{4}cc - b} = 5 - \sqrt{\frac{100}{4} - 21} = 5 - \sqrt{25 - 21} = 5 - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$. Ainſi donc l'Equation $xx - cx = -b$ a deux Racines, toutes deux Poſitives.

5. Dans cette Equation xx, peut être un grand Quarré ou un petit Quarré, ſuivant la Racine dont on ſe ſert.

Or, ſoit que xx ſoit un grand Quarré ou un petit Quarré, puiſqu'en lui retranchant cx, ce qui reſte eſt Négatif, ſavoir $xx - cx = -b$, il faut neceſſairement que la Quantité de cx retranchée, ſoit une Quantité Affirmative; & par conſequent il faut que le Produit cx ait une de ſes Racines

Digitized by Google

Positive, & l'autre Négative ; & si x est Positif, c sera Négatif.

Demonstrations. 6. Pour rendre universelle la Demonstration des deux Racines de cette Equation que nous avons montré, dans un Exemple, être l'une $+7$ & l'autre $+3$; pour demontrer, dis-je, que dans une telle Equation, l'on peut assigner deux Valeurs à x, toutes deux Affirmatives.

Soit $2y$ la Somme des Racines ; c'est-à-dire, la Somme des deux Nombres qui expriment les deux Racines, laquelle Somme, dans l Exemple proposé, est 10 ; soit $2z$ la Difference, laquelle Somme, dans cet Exemple, est 4, on aura pour la grande Racine $g = y + z$, & pour la petite $p = y - z$, & les deux Valeurs de x seront g, l'autre p.

Dans le premier cas où $x = g = y + z$, l'on aura $xx = yy + 2yz + zz$ & $cx = cy + cz$. Donc $xx - cx = yy + 2yz + zz - cy - cz = -b$.

Dans le second cas où $x = p = y - z$, l'on aura $xx = yy - 2yz + zz$, & $cx = cy - cz$.

Donc $xx - cx = yy - 2yz + zz - cy + cz = -b$.

Donc $yy + 2yz + zz - cy - cz = yy - 2yz + zz - cy + cz$.

Pour abreger cette derniere Equation, ôtons premierement toutes les Quantitez égales qui se trouvent dans l'un & dans l'autre Membre sous le même Signe, restera $2yz - cz = -2yz + cz$, & en transposant $4yz = 2cz$.

Valeur de c. 7. Et en divisant les deux Membres par z, l'on aura $4y = 2c$ & $2y = c$, le Coëfficient c est donc, dans une telle Equation, égal à la Somme des deux valeurs de x, ou des deux Nombres qui expriment ces differentes valeurs, qui sont, dans l'Exemple ci-devant $7 + 3$. Ainsi dans cet Exemple $c = 10$, & en general $c = g + p$, si nous faisons de ces deux

Digitized by Google

Lettres les deux noms des valeurs de x.

8. Il eſt facile de prouver que $b = gp$, ou que $b = y + z \times y - z$; car puiſque $yy + 2yz + zz - cy - cz = -b$, ſi à la place de c, je ſubſtituë $2y$, j'aurai $yy + 2yz + zz - 2yy - 2yz = -b$, & en corrigeant, j'aurai $zz - yy = -b$. Valeur de b.

Donc $zz - yy + b = 0$. Donc $zz + b = yy$. Donc $b = yy - zz$, Produit de $y + z = g$, par $y - z = p$.

9. On s'eſt donc apperçû que dans l'Equation $xx - cx = -b$; on s'eſt, dis-je, apperçû que $xx - 10x = -21$ pouvoit recevoir deux ſolutions en aſſignant deux valeurs à x. Car ſi $x = 7$, $xx = 49$, $10x = 70$ & $xx - 10x = 49 - 70 = -21$, & ſi $x = 3$. $xx = 9$. $10x = 30$. $xx - 10x = 9 - 30 = -21$. Recherche ſur les deux Valeurs de x.

Mais x aura-t-elle toûjours deux Valeurs, & n'en aura-t-elle jamais davantage ? Je ſuppoſe qu'on n'y a pas penſé juſques ici, & je m'inſtruirai de cette verité en la cherchant avec mon Lecteur.

Puiſque j'ai $xx - cx = -b$, j'aurai $xx - cx + b = 0$.

J'aſſigne une Valeur déterminée à x, par exemple 8.

Et pour avoir une Equation $= 0$, dont xx ſoit le premier Terme, je multiplie

$$\begin{array}{rl} & x - 8 = 0 \\ \text{par} & x - 8 = 0 \\ \hline \text{\& j'ai} & xx - 8x + 64 = 0 \\ & -8x \end{array}$$

Et en effet, puiſque $x = 8$, $x \times 8 = xx$, & $8 \times 8 = xx$.

J'ai donc $xx - xx + xx = 0$.
$-xx$

Il ſeroit de même, ſi j'avois fait $x = 5$; car j'aurois eu $xx - 5x + 25 = xx - xx + xx = 25 - 25 + 25$
$-5x \qquad -xx \qquad -25$

Digitized by Google

Et en general, ſi je fais $x = b$

j'aurai $x - b = 0$

multiplié par $x - b = 0$

$$x x - b x + b b = 0$$
$$- b x$$

car puiſque $b = x$, $b x = x x$ & $b b = x x$, dans de tels cas, x n'a qu'une Valeur, & le 3e Terme de l'Equation eſt toûjours un Quarré.

Faiſons donc en ſorte qu'il ne ſoit pas un Quarré.

Pour cet effet, il ne faut pas qu'il reſulte de la même Quantité multipliée par elle-même. Je deſigne donc deux Quantitez inégales ſous le même Signe x, qui par là devient équivoque.

Je fais $x = 8$, & $x = 3$.

Dès-là je multiplie

$x - 8 = 0$

par $x - 3 = 0$

& j'ai $x x - 8 x + 24 = 0$

$- 3 x$

$x x - 11 x + 24 = 0$, ou $x x - 11 x = - 24$

Et en general, $x = g$, $x = p$.

Donc $x x - g x + g p = 0$, & $x x - g x = - g p$.

$- p x$ $- p x$

Le 3e Terme eſt le Produit des deux Valeurs de x, & ſi je change $- g x - p x$ en $c x$, en faiſant $c = g + p$. Le Coëfficient eſt ici la ſomme de ces deux Valeurs.

Par là je comprens que l'Equation $x x - c x + g p = 0$, reſultant de deux ſuppoſitions, on peut la reſoudre par l'une & l'autre de ces ſuppoſitions.

Je vois encore qu'on ne peut aſſigner à x que deux Valeurs, parce que je ne l'ai multipliée qu'une fois par elle-même, & qu'ainſi elle n'a qu'une Valeur au Multiplié, & une Valeur au Multipliant.

La

La grande Racine $x = g = \frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - b}$, pour avoir la petite $x = p$, il faut retrancher la grande $\frac{1}{2} c + \sqrt{\frac{1}{4} cc - b}$ de la somme $c = g + p$, qui contient les deux Valeurs des Racines, & l'on aura pour Reſidu $\frac{1}{2} c - \sqrt{\frac{1}{4} cc - b} = p$.

10. Quand j'ai $xx + cx - b = 0$, ou $xx + cx = +b$, il eſt bien évident que ſi le Plan cx eſt Affirmatif, joint avec le petit Quarré; c'eſt-à-dire, avec le Quarré formé de x priſe dans ſa petite valeur, il ne pourra être Affirmatif, s'il eſt joint au grand, puiſque la ſomme croîtroit, & dans ce ſecond cas ſeroit plus grande que dans le premier; car $xx = gg$ étant plus grand que $xx = gp$, & $cx = cg$ plus grand que $cx = gp$, elle ne peut s'égaler dans l'un & l'autre cas à la même quantité b. Il faut donc que cx ſoit une grandeur *Négative*, en elle-même, lorſqu'elle eſt jointe au grand Quarré; & par conſequent il faut en ce cas-là que x, valeur de la grande Racine, ſoit Négative pour produire avec l'Affirmative c, le Produit Négatif cx, lequel demeure tel qu'il eſt, ſavoir Négatif quand il eſt precedé par le Signe +, au lieu que le Signe — changeroit ſa nature Négative en une contraire, & la rendroit Affirmative. Ainſi donc cx étant Affirmatif avec le petit Quarré, parce que la Racine du Petit eſt Poſitive, il ſera Négatif avec le Grand. Examen de la ſeconde eſpece.

A plus forte raiſon cx ne peut être Négatif avec le Petit Quarré & Affirmatif avec le Grand.

Mais peut-il être Négatif avec l'un & l'autre? Non, je le prouve ainſi.

On auroit $gg - cg = b$
$pp - cp = b$.

Digitized by Google

Donc $gg - cg = pp - cp$

Donc $gg - pp = cg - cp$

Or $gg - pp = g - p \times g + p$, & $cg - cp = g - p \times c$.

Donc, en ce cas c ſeroit $= g + p$.

On auroit $cg = g \times g + p = gg + gp$.

On auroit $cp = p \times g + p = gp + pp$.

Et non ſeulement $gg - cg = b$ ſeroit $= gg - gg - gp$, ce qui ne ſe peut, parce que b eſt Poſitif.

On auroit auſſi $pp - cp = b = pp - pp - gp$.

On a donc dans cette Equation deux Racines, la Petite eſt Poſitive, & la Grande Négative.

Cela n'empêche pas que xx ne ſoit toûjours une Grandeur Affirmative, puiſque le Quarré d'une Racine Négative ne laiſſe pas d'être Affirmatif.

Demonſtration. 11. Que le nombre qui exprime la grande $x = g = y + z$, & le nombre qui exprime la petite $x = p = y - z$; au lieu de $xx + cx$, on aura $yy + 2yz + zz - cy - cz = + b$. J'ai dit $- cy - cz = + cx$, parce que $+ cx$ eſt une Négation dans le premier cas où xx eſt le grand Quarré.

On aura auſſi pour le ſecond cas $yy - 2yz + zz + cy - cz = + b$. Donc $yy + 2yz + zz - cy - cz = yy - 2yz + zz + cy - cz$, & en corrigeant $4yz = 2cy$.

Valeur de c. Et en diviſant les deux nombres par $2y$, l'on aura $2z = c$.

Ainſi dans cette Equation $xx + cx = + b$, le Coëfficient $c = 2z$ eſt égal à la Difference des deux Racines.

En mettant $2z$ à la place de c, l'on aura $yy + + 2yz + zz - 2yz - 2zz = + b$; l'on aura auſſi $yy - 2yz + zz + 2yz - 2zz = + b$.

Donc en corrigeant $yy - zz = + b$.

La même choſe ſe trouvera ſi l'on ſubſtituë $2z$

à c dans l'autre Equation, car on aura $yy + 2yz + zz - 2zz - 2yz = +b$.

Et en effaçant de même les Grandeurs égales qui se trouvent sous des Signes contraires, l'on aura derechef $yy - zz = b$. Valeur de b.

C'est-à-dire que dans cette Equation, aussi-bien que dans la précedente, la Quantité connuë $b = gp$, Produit des deux Racines.

12. Pour tirer la Racine de cette Equation, je l'acheve, & je dis $xx + cx + \frac{1}{4}cc = b + \frac{1}{4}cc$. Calculs en Lettres.

Je veux tirer la grande Racine, & j'ai trouvé qu'elle est Négative. Pour former par ce moïen le Quarré $xx + cx + \frac{1}{4}cc$, il faut que je joigne à $-x$ la Racine $+\frac{c}{2}$; car alors le Produit cx, formé d'une Racine Négative & d'une Affirmative, sera Négatif en lui-même.

Aïant $xx + cx + \frac{1}{4}cc = b + \frac{1}{4}cc$, j'aurai $x + \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{cc}{4} + b}$, & $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$, ou $-x = -\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$.

Si nous prenons la premiere valeur de $x = p$, comme dans ce cas cx est Positif aussi-bien que xx, nous aurons pour Racine $x + \frac{1}{2}c$, & pour Quarré $xx + cx + \frac{1}{4}cc = b + \frac{1}{4}cc$.

Donc $x + \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b}$. Donc $x = -\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$.

Digitized by Google

C'eſt la petite Racine, & ſi l'on y ajoûte c, Difference des Racines, l'on aura pour la grande $g = x + \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} + \frac{1}{2}c$; mais comme cette grande Racine eſt Négative, il faut faire $-x = -\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$; car à $p = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$, ſi l'on ajoûte $+c$, on aura $\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} + \frac{1}{2}c$; & par là ſi $c = 4$ & $b = 21$, la petite Racine $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} + \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{4}16\ (=4)} + \overline{21\ (=25)} - 2 = \sqrt{4 + 21} - 2 = 5 - 2 = 3$.

Et en y ajoûtant la Difference 4 & prépoſant le Signe Négatif, l'on aura $-7 = -x$ pour la grande Racine.

Examen de la troiſiéme eſpece.

13. Quand on a $xx + cx + b = 0$, ou $xx + cx = -b$, il eſt manifeſte que le Plan cx eſt d'une nature Négative, puiſque ſon union avec le Quarré xx forme une ſomme Négative.

Comme donc la Racine eſt toûjours Affirmative quand cx eſt affirmatif, elle doit toûjours être Négative quand cx eſt Négatif; car le Coëfficient c étant toûjours Affirmatif, il faut que l'autre Racine x ſoit Négative pour rendre le Produit cx Négatif.

Demonſtrations des valeurs de $c \times b$.

14. Je trouverai la valeur de c & de b par rapport aux deux valeurs de x, en obſervant la Méthode que j'ai ſuivie dans les Articles précedens.

J'aurai donc $b = yy + 2yz + zz - cy - cz = yy - 2yz + zz - cy + cz = b$; & en corrigeant,

Digitized by Google

j'aurai comme ci-devant $4y.z = 2cz$, & en diviſant $2y = c$.

Ainſi dans l'Equation $xx + cx = -b$, le Coëfficient $c = g + p$, la ſomme de la grande & de la petite x.

Il n'y a qu'à repeter l'Article 6 pour prouver que $b = gp = y + zxy - z = yy - zz$.

15. Pour tirer les Racines de cette Equation, j'obſerve que la Racine $\frac{1}{2}c$ doit être Affirmative, afin de faire avec $-x$ le Produit cx Négatif. L'on aura donc $x + \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{4}cc - b}$, & $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc - b} - \frac{1}{2}c$, ou parce que x eſt Négatif, l'on aura $-x = -\sqrt{\frac{1}{4}cc - b} - \frac{1}{2}c$. Calcul.

16. Quand enfin j'ai $xx - cx - b = 0$, ou $xx - cx = +b$, il eſt viſible que dans cette Formule le Plan cx doit toûjours être moindre que le Quarré xx, quelle que ſoit la valeur des Racines qui le forment; car après avoir retranché cx de xx, ce qui reſte s'égale avec une Grandeur Affirmative $+b$. Examen de la quatriéme eſpece.

Si le Plan cx joint avec le grand Quarré xx, & faiſant croître la ſomme égaloit préciſément b, ce même Plan cx, joint au petit Quarré xx, formeroit une ſomme plus petite & inferieure à b; beaucoup plus lui ſeroit-elle inferieure, ſi $-cx$ Affirmatif avec le grand Quarré, devenoit Négatif avec le petit.

Ainſi donc $-cx$ joint au grand Quarré xx, marque un vrai retranchement; & par conſequent en ce cas cx eſt un Produit Affirmatif.

Digitized by Google

Racine Affirmative. Or, afin qu'il ſoit Affirmatif, il eſt neceſſaire que la Racine x ſoit Affirmative, puiſque c eſt Affirmatif de ſa nature; ainſi donc la grande Racine eſt Affirmative dans cette Equation.

Demonſtration. Que ſi $-cx$, joint au petit Quarré xx, marquoit un retranchement de ce petit Quarré, l'on auroit $xx-cx=yy-2yz+zz-cy+cz=+b$, &

$$xx-cx=yy+2yz+zz-cy-cz=+b.$$

L'on auroit donc, après les corrections faites, comme ci-devant $4yz=2cz$, & par conſequent $2y=c$, & le Coëfficient c ſeroit égal à la ſomme des deux Racines, & par là ſurpaſſeroit la grande Racine de x.

Il ſuivroit de là que xx ſeroit moindre que cx, d'où l'on devroit conclure qu'au lieu de dire $xx-cx=+b$, il faudroit dire $xx-cx=-b$, car le plus grand, retranché du moindre, égale une Grandeur Négative.

Le Plan cx ne marque donc pas un retranchement, lorſque dans le même Nombre de l'Equation, il eſt joint avec le petit Quarré xx.

Or ſi cx marque une Addition, nous aurons $xx-cx=yy+2yz+zz+cy-cz=+b$.

Valeur de c. De là nous conclurons que $4yz=2cy$ & $2z=c$.

Ainſi dans cette Equation, le Coëfficient c eſt égal à la Difference des Racines.

Valeur de b. Il n'y a qu'à repeter la Demonſtration de l'Article 10, pour ſe convaincre que $b=gp=y+z\times y-z=yy-zz$.

Racine Négative. Puiſque cx marque une Addition, c'eſt une preuve que le Plan cx eſt Négatif de ſa nature; par conſequent puiſque le Coëfficient c, l'une de ſes Racines, eſt Affirmatif, il faut que l'autre, ſavoir x, ſoit une Grandeur Négative.

Calcul. 17. En calculant, comme ci-devant, l'on aura

Digitized by Google

pour la Grande Racine $x - \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b}$, & $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} + \frac{1}{2}c$. Pour avoir la petite, il faut ôter de la grande la Difference c, & on aura $\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} + \frac{1}{2}c - c = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$, & comme cette Racine eſt Négative, il faut dire $-x = -\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$.

18. Puiſque ces quatre Equations $\begin{cases} xx - cx + b = 0. \\ xx - cx - b = 0. \\ xx + cx + b = 0. \\ xx + cx - b = 0. \end{cases}$ Autre Demonſtration.

Puiſque, dis-je, ces quatre Operations ont chacune d'un côté trois Membres, & de l'autre 0, leur valeur eſt la même que celle du Produit ſuivant.

Soit $a = b$, ſoit $c = d$. J'aurai $a - b = 0$, $c - d = 0$, & en multipliant $a - b = 0$, par $c - d = 0$, on aura $ca - cb - ad + bd = 0$, & en faiſant $-cb - ad = ef$, on aura $ac - ef + bd = 0$.

Or, que cette Equation ſoit égale à 0, je le prouve en deux manieres. 1°. La valeur de 0, multiplié par 0, ne produit que 0. 2°. Puiſque $c = d$, $ac = ad$, & $+ca - ad = ca - ca$ eſt $= 0$; de même, puiſque $c = d$, $cb = db$, & $db - cb = cb - cb = 0$. Voila donc une Equation qui a deux choſes communes avec les quatre ci-deſſus. 1°. D'un côté ſont trois Membres, 2°. de l'autre, zero. L'on peut pouſſer plus loin cette conformité; car ſi l'on fait a, b, c, d ſucceſſivement des Grandeurs Affirmatives & Négatives, l'on aura :

Digitized by Google

$$xx - cx = \begin{cases} -b \text{ Rac. aff.} \begin{cases} \text{G. } \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - b} \\ \text{P. } \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - b} \end{cases} \\ +b \text{ Rac. aff.} \begin{cases} \text{G. } \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c \\ \text{P. } -\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} + \frac{1}{2}c \end{cases} \end{cases}$$

$$xx + cx = \begin{cases} -b \text{ Rac. nég.} \begin{cases} \text{G. } -\sqrt{\frac{1}{4}cc - b} - \frac{1}{2}c \\ \text{P. } \sqrt{\frac{1}{4}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc - b}} \end{cases} \\ +b \text{ Rac. nég.} \begin{cases} \text{Gr. nég. } -\sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c \\ \text{P. aff. } \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c \end{cases} \end{cases}$$

En faiſant a Affirmatif $a - b = 0$,
& c Affirmatif $c - d = 0$,
on aura comme ci-deſſus $ac - ef + bd = 0$, répondant à $xx - cx + b = 0$. Si l'on fait $a = -b$, & $c = -d$, l'on aura $a + b = 0$, $c + d = 0$; par conſequent en les multipliant, l'on aura $ac + cb + ad + bd = 0$; & en faiſant $+cb + ad = +ef$, l'on aura $ac + ef + bd = 0$, répondant à $xx + cx + b = 0$.

Si l'on fait $a + b = 0$ & $c - d = 0$, en les multipliant, on aura $ac + cb - ad - bd = 0$; & en faiſant $+cb - ad = -ef$, on aura $ac - -ef - bd = 0$, répondant à $xx - cx - b = 0$. Enfin, ſi l'on fait $a - b = 0$ & $c + d = 0$, l'on aura $ca - cb + da - bd = 0$: & en faiſant $da - cb = +ef$, l'on aura $ca + ef - bd = 0$, répondant à $-xx + cx - b = 0$.

Digitized by Google

19. L'on pourra donc faire ces quatre Equations $\begin{cases} ac - ef = -bd \\ ac + ef = -bd \\ ac - ef = +bd \\ ac + ef = +bd \end{cases}$ Application

Dans chacune de ces Equations le Membre de la droite qui eſt ſeul de ſon côté, eſt un Produit de deux Racines; le Produit eſt ſuppoſé connu, & l'on veut par ſon moïen découvrir la valeur des Lettres inconnuës qui ſont de l'autre côté. J'appellerai le Produit connu gp, la Grande Racine ſera g, & la Petite p.

Si les deux Membres que l'on compare avec le connu gp ſont tous deux inconnus, comme ſi je diſois $z + y = gp$, je n'ai qu'à partager gp arbitrairement; de ſorte qu'une telle Queſtion peut recevoir diverſes ſolutions. Premier cas.

On peut annexer aux deux Membres inconnus des conditions qui rendent la ſolution moins generale & moins indéterminée; par exemple, ſi je diſois $xx + y = gp$, il faudroit choiſir un Quarré plus petit que gp, ce Quarré ſeroit xx, & après l'avoir ôté de gp, le Reſidu ſeroit y. Second.

Si l'on avoit $y + 3z = gp$, en diviſant le tout par 3, l'on auroit $\frac{y}{3} + z = \frac{1}{3} gp$, & l'on partageroit ce $\frac{1}{3}$ de gp arbitrairement. Troiſiéme.

Mais, quand on a d'un côté un Quarré inconnu, plus ou moins la Racine de ce Quarré, multipliée par une Quantité connuë, & que dans ce cas un Quarré, plus ou moins la Racine de ce Quarré, multipliée par un Coëfficient connu, égale un certain Produit. Quand, dis-je, il faut chercher, I°. En quel cas $gg \mp cg = \mp gp$, ou en quel cas $pp \mp cp = \mp gp$. Je tâcherai de demontrer les Quatriéme.

Digitized by Google

mêmes veritez d'une maniere qui les preſente encore plus diſtinctement.

Nouveaux éclairciſſemens.

2o. Cherchons premierement à reſoudre $gg - cg = -gp$.

Puiſque $gg - cg = -gp$, il ſuit que $gg = cg - gp$. Donc $gg + gp = cg$, & en diviſant par g, on aura $g + p = c$. Ainſi dans une telle Equation le Coëfficient $c = g + p$, Somme des deux Racines, & puiſque $xx - cx = -gp$. $xx - cx = gg - cg$. Donc la grande Valeur de $x = g$.

Cherchons après cela la petite Valeur de $x = p$, & diſons $pp - cp = -gp$. Donc $pp + gp = cp$. Donc encore $p + g = c$, & la petite Valeur de $x = p$. Voila ce qui répond à $xx - cx + + b = o$.

IIo. $gg - cg = gp$. Donc $gg - gp = cg$. Donc $g - p = c$, & dans cette Equation le Coëfficient c eſt égal à la Difference des Racines, & la Grande $x = g$.

Il ſuit de là que $gg - cg = gg - gg + gp = gp$; car $gx - c = gx - g + p$, ce qui revient à $-gg + gp$.

Mais ſi l'on ſuppoſe $pp - cp = gp$, & qu'en mettant $g - p$ à la place de c, l'on diſe $pp - gp + pp = gp$ (car $px - c = px - g + p$) on auroit $2pp = 2gp$, & $pp = gp$, ce qui eſt impoſſible, puiſque g eſt plus grand que p.

Il faut donc que dans ce cas cp ſoit une Quantité Négative & ſon retranchement une Addition, & par conſequent que cp, Quantité Négative, ſoit renduë Affirmative par le Signe —.

Cela ſuppoſé, on aura viſiblement $pp + cp = pp + gp - pp = gp$; mais afin que cp ſoit Négatif en lui-même, il faut que la Racine p égale

à la petite Valeur de x, ſoit Négative.

III°. $gg + cg = -gp$. Dans cette Equation $+cg$ doit marquer un vrai Retranchement, & pour faire cg toûjours Négatif, il faut que les deux Racines ſoient Négatives; car la même choſe doit ſe dire de $pp + cp = -gp$.

IV°. $gg + cg = gp$. En ſuppoſant ces deux Racines Poſitives, & diviſant les deux Membres par g, l'on concluëroit que $g + c = p$, ce qui eſt impoſſible; car la grande Racine augmentée de c, ne peut être égale à la petite.

Donc $+cg$ marque un Retranchement, & c'eſt comme s'il y avoit $gg - cg = +gp$, & la grande Valeur de $x = g$ doit être Négative, afin que le Produit cg ſoit Négatif.

Mais ſi je dis $pp + cp = gp$, je concluërai $p + c = g$ la petite Racine plus la Difference eſt égale à la grande Racine; ce qui eſt vrai, & en ce cas cg eſt *Affirmatif*, & la petite Racine p *Affirmative*.

21. Il eſt certain que ſi au lieu des Equations, $\left\{\begin{array}{l} xx - cx + b = 0 \\ xx - cx - b = 0 \\ xx + cx + b = 0 \\ xx + cx - b = 0 \end{array}\right.$ **Continuation des éclairciſſemens.**

l'on fait $\left\{\begin{array}{l} aa - ac + bc = 0 \\ \quad -ab \\ aa - ab - bc = 0 \\ \quad +ac \\ aa + ab + bc = 0 \\ \quad +ac \\ aa + ab - bc = 0 \\ \quad -ac \end{array}\right.$

ce qui arrive en multipliant 1°. $a - b = 0$

par $a - c = 0$

ce qui donne $aa - ab + bc = 0$
$-ac$

Digitized by Google

2°. $a - b = 0$
par $a + c = 0$
ce qui donne $aa - ab - bc = 0$
$+ ac$

& en ce ſecond cas le premier $a = b$ eſt Affirmatif, & le ſecond $a = c$ eſt Négatif.

De ſorte qu'en diſant $a + c = 0$, c'eſt comme ſi l'on diſoit le Négatif $a +$ l'Affirmatif $c = 0$, ou l'Affirmatif $a +$ le Négatif $c = 0$, & c'eſt ainſi qu'il faut s'exprimer afin que ac ſoit Affirmatif.

3°. $a + b = 0$
par $a + c = 0$
ce qui donne $aa + ab + bc = 0$
$+ ac$

En ce 3e cas les deux a ſont des Grandeurs Négatives ; car ſi $a + b = 0$, il faut que $a = -b$; & ſi $a + c = 0$, il faut que $a = -c$. C'eſt donc comme ſi l'on diſoit l'Affirmatif $a +$ le Négatif $b = 0$.

4°. $a + b = 0$
par $a - c = 0$
ce qui donne $aa + ab - bc = 0$
$- ac$

En ce 4e cas le premier a eſt une Grandeur Négative.

Il eſt certain, dis-je, que ſi l'on compare ces Equations une à une, on remarque d'abord ces conformitez, 1°. Elles ſont égales à 0, 2°. Le 3e Terme s'y trouve ſous les mêmes Signes. 3°. Les Coëfficiens ſont encore ſous les mêmes Signes. Cela eſt viſible dans la premiere & la 3e, & deviendra de même viſible dans la ſeconde & la 4e. Si l'on conſidere que dans la ſeconde $-b + c$, ou $+c - b$ Coëfficient de a eſt Négatif, puiſque $b = a$

Digitized by Google

pris dans la Grande Valeur, & $c = a$ pris dans la Petite; de ſorte que nous pouvons dire $c - b = -d$, & faire $aa - da - bc = 0$.

Et dans la 4e, puiſque b eſt plus grand que c, le Coëfficient $b - c$ eſt Affirmatif, & $b - c = +d$, Difference des Racines; de ſorte que $aa + ab - ac$ $- bc = aa + ad - bc$.

De plus, le premier Terme eſt une Grandeur Affirmative dans chacune.

22. Outre ces conformitez très-réelles & très-viſibles, il s'en trouve une 5e, mais apparente ſeulement; car le premier Terme paroît un Quarré par tout; cependant ce n'eſt pas un vrai Quarré, puiſque le premier a, qui eſt le Multiplié, n'eſt pas de la même valeur que le ſecond, qui eſt le Multipliant; de ſorte que l'expreſſion aa eſt ici équivoque, & elle paroît marquer un Quarré, quoiqu'elle n'en ſoit pas un, comme il paroît par ſa generation. Equivoque levée.

Il faut corriger cet équivoque, & dégager la verité qu'il obſcurcit. Pour cet effet, ſoit g la Grande Valeur de $x =$ à la Grande Valeur de a, & p Petite Valeur de x, égale à la Petite Valeur de a, j'aurai donc pour la 1re Equation $g - g = 0$;
en la multipliant par la ſeconde $p - p = 0$

$$gp - gp + gp = 0$$
$$- gp$$

On en aura une 3e, où le Coëfficient eſt $g - p = -s$, Somme des deux Racines $g + p$. J'appellerai ce Coëfficient $-c$, & ici $c = s$.

Cela poſé, ſi à la place de p, dans le $-gp$ d'enhaut, je mets g; au lieu de $-gp$, j'aurai $-gg$, & alors afin que l'Equation $gp - gg - gp + gp = 0$, il faut augmenter la premiere Quantité gp, & la changer en gg, afin qu'elle ſoit détruite par

la ſeconde $-gg$, comme la 4^e $+gp$ eſt détruite par $-pg$, & alors l'on aura $gg-gg+gp=0$.
$-gp$

Et en faiſant le Coëfficient $c=g+p$, Somme des Racines, l'on aura $cg=gg+gp$, & par conſequent $-cg=-gg-pg$, d'où il reſultera que $gg-cg+gp=0$; car il ſera $=gg-gg-gp+gp$, & cette Equation répond préciſément à celle-ci $xx+cx+b=0$.

C'eſt-à-dire qu'une telle Equation a lieu lorſque le 3e Terme eſt le Produit de deux Racines, que le Coëfficient c du ſecond Terme eſt la Somme de ces Racines, & que le premier Terme eſt le Quarré de la Grande.

L'Equation aura encore lieu, ſi l'on met la Petite à la place de la Grande; car quand on a $gp-gp+pg=0$, ſi l'on change le g du ſecond
$-gp$
Terme d'en bas en p, l'on aura $gp-gp+pg$,
$-pp$
& afin que cette Equation ſe réduiſe à la valeur de la précedente, & devienne $=0$, il faudra changer le premier Terme gp en pp, & l'on aura $pp-pg+pg=0$; & enfin, en faiſant les deux
$-pp$
Coëfficiens $g+p=c$, on aura $-c=-g-p$, & par conſequent $-cp=-gp-pp$, & ainſi l'on aura $pp-cp+gp=0$, & cette Equation répond entierement à celle-ci $xx-cx+b=0$, en faiſant la petite valeur de $x=p$.

La ſeconde Equation, c'eſt $xx-cx-b=0$. A cette Equation répond, dans la Méthode ordinaire, $aa-ab-bc=0$, & cette Equation
$+ac$
reſulte, dit-on, de la Multiplication de

Digitized by Google

$a - b = 0$
par $a + c = 0$
qui donne $aa - ab - bc = 0$
$+ ac$

Mais pour lever de même toute l'équivoque de cette Equation, je reprens ma Méthode, & multipliant $g - g = 0$
par $p + p = 0$
j'ai $gp - gp - pg = 0$
$+ gp$

Enſuite changeant le p du ſecond Terme d'enhaut en g, & augmentant de même le premier Terme, j'ai $gg - gg - pg = 0$.
$+ pg$

Après cela je fais $-g + p = c$; mais comme p eſt plus petit que g, l'aſſemblage $p - g$ eſt négatif, & c'eſt la difference des deux Racines, précedée du Signe négatif, de ſorte que $p - g = -c$.

L'on a donc $gg - cg - gp = 0$, ce qui répond exactement à l'Equation $xx - cx - b = 0$. Dans cette Equation le 3e Terme, comme dans la précedente, eſt un Produit de deux Racines, & le premier Terme eſt le Quarré de la Grande; mais le Coëfficient c, qui multiplie le ſecond, eſt ici la Difference des deux Racines. Dans cette Equation la Grande Racine g eſt Affirmative, puiſque $g - g = 0$.

Mais la Petite eſt Négative, puiſque $p + p = 0$, & par conſequent $p = -p$. Je dis $p + p = 0$; car c'eſt comme ſi je diſois l'Affirmative p plus la Négative $p = 0$; p étant Négatif, cp, Plan de p Négative de ſa nature, par c, eſt un Plan Négatif; de ſorte que le Signe — lui donne une nature contraire; $-cp$ devient Affirmatif, & $pp - cp$ ſignifie le Quarré de la Petite Racine, + la Pe-

Digitized by Google

tite Racine multipliée par la Difference des Racines, & en ce cas $pp - cp - gp = o$.

La 4e Equation eſt $xx + cx - b = o$.

Pour corriger l'équivoque $aa + ab - bc = o$, $- ac$ laquelle on a accoûtumé de produire, & qui provient de $a + b = o$ multiplié par $a - c = o$

$aa + ab - bc = o$
$- ac$

Je multiplie $g + g = o$
par $p - p = o$

ce qui me donne $gp + gp - gp = o$
$- gp$

Je change le p du ſecond Terme d'en bas en g : je fais le même changement au premier Terme, & j'ai $gg + pg - gp = o$.
$- gg$

Enſuite changeant les Coëfficiens $g + p$ en leur égal $+ c$, j'ai $gg + cg - gp = o$. Mais comme dans cette Equation la Grande Racine $g = -g$ eſt Négative, le Plan cg eſt Négatif de ſa nature; car le Coëfficient eſt toûjours regardé comme une Quantité Affirmative. Pour conſerver à cg ſa nature Négative, il faut la faire préceder du Signe $+$. Si je ſubſtituë p à g, j'aurai $pp + cp - gp = o$, & en ce cas $+ cp$ eſt une veritable poſition; car la Racine p eſt ici Affirmative, puiſque $p - p = o$.

Pour comparer les deux dernieres; ſçavoir, 1°. $xx + cx + b = o$ d'un côté, avec $aa + ab + bc$ $+ ac$ $= o$, provenante de $a + b = o$ multiplié par $a + c = o$, je multiplie $g + g = o$ par $p + p = o$, &

& j'ai $gp + pp + pg = o$. Je corrige, & je
$+ gp$
change p du ſecond Terme ſuperieur en g; je fais le même changement dans le premier Terme, ce qui me donne $gg + gg + pg = o$.
$+ gp$

Et en faiſant $g + p = c$, j'aurai $gg + cg + gp = o$, ce qui répond préciſément à $xx + cx + b = o$.

Dans cette Equation le troiſiéme Terme, comme dans les precedentes, eſt le Produit de deux Racines; le premier Terme eſt auſſi le Quarré d'une des Racines; mais ici, comme dans la premiere, le Coefficient c eſt égal à la Somme des Racines.

Et puiſque chacune des Racines eſt Négative, car $g = -g$ & $p = -p$, ou l'un des $a = -b$, & l'autre $a = -c$, le Plan cx, c'eſt-à-dire, tant le Plan cg, que le Plan cp, formé des Racines g & p Négatives, & du Coëfficient, toûjours Affirmatif de ſa nature; ce Plan, dis-je, eſt Négatif de ſa nature, & le Signe $+$ la lui conſerve; de ſorte que $gg + cg$, c'eſt gg diminué de cg, comme $pp + cp$, c'eſt pp diminué de cp. Ainſi nous avons $xx + cx = -b$

$gg + cg = -gp$

$pp + cp = -gp$

A $xx + cx - b = o$, répondront $gg + cg - gp = o$, & $pp + cp - gp = o$.

Car je ferai d'abord $g + g = o$

$p - p = o$

$gp + gp - gp = o$
$- gp$

Enſuite $gg + gp - gp = o$,
$- gg$

Digitized by Google

& $pp + gp - gp = 0$.

$-pp$

Après cela $g - p = c$, & j'aurai g Négative, multipliée par $c = g - p$, donnant le Produit Négatif cg, qui reste tel sous le Signe $+$.

Ainsi $gg + cg - gp = 0$, est équivalent à $gg - cg - gp = 0$.

Comme $xx + cx - b = 0$, est équivalent à $xx - cx - b = 0$. Quant à p, elle est Affirmative, & $pp + cp - gp = xx - cx - b = 0$.

Cinquiéme espece.

23. Si l'on fait $x = -a$, & après cela $x = +a$; c'est-à-dire, que sans changer la Valeur de x, on la rende une fois Positive, & une autre fois Négative, on aura $x + a = 0$

$x - a = 0$

$xx + ax - aa = 0 = xx - aa = 0$

$-ax$

En ce cas les deux Racines g & p sont égales, & le Produit gp est un Quarré égal à aa. Donc $xx - aa = xx - gp = xx - b = 0$.

Ainsi voila une 5e Equation du second degré.

Examen d'une sixiéme.

24. On ne peut pas y en joindre une sixiéme $xx + b = 0$.

Car soit que les deux Racines de x soient Positives, soit qu'elles se trouvent toutes deux Négatives, xx est Positif & b aussi, puisqu'il est le Produit des deux Racines de x.

Pour faire le Produit $xx + b = 0$, il faudroit multiplier $x + \sqrt{-aa} = 0$, par $x - \sqrt{-aa} = 0$

$x + \sqrt{-aa}$

$x - \sqrt{-aa}$

$xx + x\sqrt{-aa} - \sqrt{-aa} \times \sqrt{-aa} = xx$

$-x\sqrt{-aa}$

$-aa = xx + aa = 0$, & aa seroit $= b$.

Digitized by Google

Si $\sqrt{-aa}$ designoit une Grandeur, ou quelque Rapport avec une Grandeur, l'Equation $xx+aa=0$, qui en resulte exprimeroit aussi quelque Grandeur, ou quelque Rapport avec une Grandeur. Mais $\sqrt{-aa}$ ne signifie rien, parce que le Quarré aa, Produit de $+a\times+a=+aa$, est aussi le Produit de $-a\times-a=+aa$. Il n'est donc jamais & ne peut être $-aa$.

Reduction de trois Termes à deux

25. Quand, dans les Equations du second degré, il n'y a que deux Termes, c'est une preuve que xx n'a qu'une Racine, & alors $x=\sqrt{b}$.

Si dans l'Equation $xx-cx+b=0$, je suppose $x=y+\frac{c}{2}$.

J'aurai $xx=yy+\frac{cc}{4}+2\frac{cy}{2}=yy+cy+\frac{cc}{4}$.

J'aurai $cx=cy+\frac{cc}{2}$, & $-cx=-cy-\frac{cc}{2}$.

Donc $xx-cx+b=0=yy+cy+\frac{cc}{4}+b=$

$=yy-\frac{cc}{4}+b=0$. $-cy-\frac{cc}{2}$

Donc $yy=\frac{cc}{4}-b$, & $y=\sqrt{\frac{cc}{4}-b}$.

Or $y+\frac{c}{2}=x$. Donc $x-\frac{c}{2}=y$, & $x-\frac{c}{2}$

$=\sqrt{\frac{cc}{4}-b}$. Donc $x=\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{cc}{4}-b}$.

Voici comme on a trouvé cette Valeur, qui, substituée à x, fait évanoüir le second Terme.

D'abord on l'appelle $y+z$, & on fait $x=y+z$.

Donc $xx=yy+2yz+zz+b=0$.

$-cx=\quad -cy-cz$

Digitized by Google

Or afin qu'il ne reſte que $yy + zz + b = 0$, $-cz$

il faut que $2yz - cy = 0$; & c'eſt ce qui arrivera, ſi $2z = c$, car alors $y \times 2z - y \times c = 0$.

Or, dès que j'ai $2z = c$, j'aurai $z = \frac{c}{2}$.

Dès-là $+zz = \frac{cc}{4}$, & $-cz = -\frac{c}{2} \times c = -\frac{cc}{2}$.

D. $xx - cx + b = 0 = yy + 2yz + zz + b = 0$.
$-cy \quad -cz$

$= yy + \frac{cc}{4} - \frac{cc}{2} + b = 0 = yy - \frac{cc}{4} + b = 0$.

Donc $x = y + z = y + \frac{1}{2}c$.

Dans l'Equation $xx + cx - b = 0$, où le ſecond Terme a le Signe $+$, il faut faire $x = y - \frac{1}{2}c$, & on aura

$yy - cy + \frac{cc}{4} - b = 0 = yy - \frac{cc}{4} - b = 0$.
$+cy - \frac{cc}{2}$

Donc $y = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b}$, & x étant $= y - \frac{1}{2}c$, on aura $x + \frac{1}{2}c = y$. Donc $x + \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b}$.

Donc $x = \sqrt{\frac{1}{4}cc + b} - \frac{1}{2}c$.

$xx + cx + b = 0$, peut repreſenter les cinq Equations du ſecond degré; ſçavoir, la cinquiéme $xx - b = 0$, moïennant deux conditions, 1°. Que $c = 0$, 2°. Que $+b$ ſoit à la place de $- + b$.

Dans les quatre autres c tient la place de tous les Coëfficiens Numeriques poſſibles; & comme $+b$

Digitized by Google

se change en $-b$, $+cx$ se changera aussi en $-cx$, suivant l'Equation que $xx+cx+b=0$ representera. On peut aussi l'exprimer ainsi $xx \overline{+} cx \overline{+} b = 0$.

26. Soit $s+d$ la Grande Racine, $s+d=g$. Soit $s-d$ la Petite, $s-d=p$. Autre Calcul.

On aura $x-g=0=x-s-d=0$

$x-p=0=x-s+d=0$

& $xx-gx+gp=xx-sx+ss+sd=xx-2sx+ss-dd=0$.

$-px \quad -dx \quad -sd$

$-sx \quad -dd$

$+dx$

Donc $xx-2sx+ss-dd=xx-cx+b=0$.

Donc $2sx=cx$, & $+ss-dd=+b$. Donc $+2s=c$. Donc $+s=\frac{c}{2}$, & $s=+\frac{c}{2}$. Donc $ss=\frac{cc}{4}$. Donc $\frac{cc}{4}-dd=+b$. D. $\frac{cc}{4}-b=dd$.

$\sqrt{\frac{cc}{4}-b}=d$.

Donc $x-s-d=x-\frac{1}{2}c-\sqrt{\frac{cc}{4}-b}=0$.

$x-s+d=x-\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{cc}{4}-b}=0$.

Donc $x=+\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{cc}{4}-b}$.

$x=+\frac{1}{2}c-\sqrt{\frac{cc}{4}-b}$.

Digitized by Google

CHAPITRE XXII.

Des Equations du troiſiéme degré.

1. SI je fais $\left\{\begin{matrix} x=g \\ x=p \\ x=f \end{matrix}\right\}$ c'eſt-à-dire, ſi je donnois trois Valeurs à x,

j'aurois $x-g=0$
$x-p=0$

& dès-là $\left.\begin{matrix} xx-gx+gp \\ -px \end{matrix}\right\}=0$; & en multipliant encore une fois par $x-f=0$

$$x^3-gxx+gpx-gpf=0$$
$$-pxx+fgx$$
$$-fxx+fpx$$

& en faiſant $g+p+f=c$, & $gp+gf+pf=m$, j'aurai $x^3-cxx+mx-gpf=0$.

Le 3e Membre tout compoſé de Connuës ſera égal au Produit des trois Racines.

Reflexion. 2. Quand donc on a $x^3-cxx+mx-b=0$, afin que cette Somme ſoit un vrai Cube, 1°. Il faut que b ſoit un Cube. Il faut, 2°. Que c contienne trois fois la Racine de b. 3°. Que m en contienne trois fois le Quarré.

Soit h la Racine Cube de $b=h^3$, on aura donc $x^3-cxx+mx-b=x^3-3hxx+3hhx-h^3$.

Application. 3. Cela aura lieu, ſi $x=g$ cela aura encore lieu, ſi $x=p$ & cela aura auſſi lieu, ſi $x=f$ } Dans les 3 Membres.

Au premier cas, j'aurois $g^3-cgg+mg-gpf=0$.

A la place de c, ſubſtituons $g+p+f$, & à la

place de m, ſubſtituons $gp+fg+fp$, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} g^3 - g^2 + ggp - fpg = 0 \\ -pgg + fgg \\ -fgg + fpg \end{array}\right\}$$ ce qui eſt viſible.

Il en ſeroit de même, ſi nous avions mis p au lieu de x.

4. Si je fais $x - 4 = 0$ Exemple en Nombre.

$$x - 4 = 0$$

j'ai $xx - 8x + 16 = 0$

par $x - 4 = 0$

j'ai $x^3 - 8xx + 16x - 64 = 0$
$\quad - 4xx + 32x$

& dans ce Cube Complexe $x^3 - 12xx + 48x - 64$.

La Racine Cube du ſecond Cube Incomplexe, qui eſt 4, a pour Quarré 16, dont le triple 48 eſt multiplié par x; & 12, le triple de cette Racine, multiplie le Quarré xx, formé de la premiere Racine.

C'eſt comme quand je cube $x - g = 0$, & que j'ai $x^3 - 3gxx + 3xgg - g^3 = 0$.

5. Mais quand je dis $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right\}$ Donc $x - 2 = 0$ Difficulté.
$\quad x - 3 = 0$

Donc $xx - 5x + 6 = 0$
$\quad x - 4 = 0$

Donc $x^3 - 5xx + 6x - 24 = 0$
$\quad - 4xx + 20x$

$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$

Alors 24 n'eſt pas Cube & les Produits $-9xx + 26x$ ne ſont pas diſtribuez comme dans l'Exemple precedent.

Mais puiſque cette apparence de Cube $= 0$, il faut 1°. Que deux de ſes Racines ſoient égales, & que l'une ſoit ſous le Signe $+$, & l'autre ſous le

Digitized by Google

Signe — ; car si $a = b$, $+a-b = 0$, & le Quarré qui en provient, est égal à zero, & par quelque 3e Quantité qu'on multiplie ce Quarré, ce qui en resultera sera encore $= 0$. 2°. Que dans $-9xx+26x-24$, la Valeur de la Grande Racine qui est égale à x, & que nous appellerons y, soit tellement distribuée, que ces trois Produits $-9xx+26x-24 = -3yxx+3yyx-y^3$; & puisque $y = x$, on aura $-9xx+26x-24 = -3x^3+3x^3-x^3$, & c'est ce qu'il faut que l'on trouve.

Et en general, quand j'ai $x^3-cxx-mx-b=0$, il faut que les trois derniers Termes soient équivalens à $-x^3-3xxxx+3xxxx$. C'est la Somme qu'il y faut chercher, & découvrir la Valeur de x par le moïen des Connuës c, m, b.

6. Pour cela on fait disparoître le second Terme, afin d'avoir moins de mêlanges à comparer.

On fait disparoître le second Terme

Dans ce dessein, je suppose $x = y+z$

1°. J'aurai donc $x^3 = y^3+3yyz+3yzz+z^3$

2°. $-cxx = -cyy-2cyz-czz$

3°. $+mx = +my+mz$

$-b = -b$

} $= 0$

Dans cette Equation le second Terme est $+3yyz-cyy$

Afin qu'il s'évanoüisse, il faut que $3z = c$, & $z = \frac{c}{3}$ & $-\frac{c}{3} = -z$ & $zz = \frac{cc}{9}$.

Dès-là je substituë, & j'ai

$$\left.\begin{array}{l} y^3+cyy+\frac{3cc}{9}+\frac{c^3}{27} \\ -cyy \\ \quad -\frac{2cc}{3}-\frac{c^3}{9} \\ \quad +my+\frac{mc}{3} \\ \quad -b \end{array}\right\} = x^3-cxx-mx-b$$

Digitized by Google

où parce que $\frac{-2ccy}{3} = \frac{-6ccy}{9}$,

on aura $\frac{3ccy}{9} + \frac{-2ccy}{3} = \frac{-3ccy}{9} = \frac{-ccy}{3}$,

& en tout $y^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{-ccy}{3} + \frac{mc}{3} \\ +my + \frac{+c^3}{27} \\ \quad \frac{-c^3}{9} \\ \quad -b \end{array} \right\} = 0$

& en faisant $\frac{-cc}{3} + m = c$, & $\frac{mc}{3} + \frac{+c^3}{27} - \frac{c^3}{9} - b = -b$, j'ai $y^3 + cy - b = 0$.

7. Dès que j'ai $y^3 - cy - b = 0$, je considere que $\left\{ \begin{array}{l} gxx \\ pxx \\ fxx \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{marquent exactement, par} \\ \text{le moïen des expressions} \\ \text{universelles } g, p, f, x, \end{array} \right.$ tous les seconds Termes de toute Equation possible du 3e degré. Conséquences.

Ce second Terme ne peut pas s'évanoüir, à moins que les Multiplians g, p, f de la même xx, ne se détruisent mutuellement.

Pour cet effet, il est absolument necessaire qu'ils soient sous des Signes contraires ; car s'ils sont tous trois Négatifs ou tous trois Positifs, ils ne se détruiront point.

S'il y en a deux Négatifs, il faut que le 3e, qui reste seul Positif, soit égal aux deux Négatifs, pour les détruire ; & reciproquement, si le Négatif détruit les deux autres, il faut qu'ils soient tous deux Positifs. Ainsi l'un est égal à la Somme des deux autres.

Donc si $s + d = g$, & $s - d = p$, & si ces deux Racines sont Positives, il faut necessairement que

Digitized by Google

la Négative ſoit égale à la Somme de ces deux, & par conſequent $= 2s$, car $\left.\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}\right\} = 2s$

Qu'on faſſe donc $y = s+d$

$y = s-d$

$2y = 2s$

on aura 1°. $y - s - d = 0$

$y - s + d = 0$

& par conſequent $yy - sy - dy + ss + sd - dd = 0$

$-sy + dy \quad -sd$

$yy - 2sy \quad +ss \quad -dd = 0$

multipliez par $y + 2s = 0$

donne $y^3 - 2syy + ssy - ddy + 2s^3 - 2sdd$

$+2syy - 4ssy$

$y^3 \quad -3ssy \quad +2s^3 \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} = 0$

$\quad -ddy \quad -2sdd \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$

cela répond à $y^3 \quad -my \quad \mp b = 0$

D'où l'on conclud 1°. que $3ss + dd = m$.

2°. que $\left.\begin{matrix} +2s^3 \\ -2sdd \end{matrix}\right\} = \mp b$.

De la Valeur de *b*.

8. Dans le cas où les deux Racines $s+d$, $s-d$ ſont toutes deux Poſitives, s la moitié de leur Somme, eſt plus grande que d la moitié de leur Difference.

Donc quand j'ai $yy = ss + 2ds + dd$; comme $2s \times s > 2s \times d$, on aura $ss + 2ss\ (= 3ss) + dd > ss + 2ds + dd$, & par conſequent $3ss + dd > yy$.

Par conſequent $yy \times y = y^3 < y \times 3ss + dd$.

Par conſequent encore, puiſque $m = 3ss + dd$, $my > y^3$; & par conſequent après avoir dit $y^3 - my$, il faut ajoûter un $+$, afin d'égaler le tout à zero.

On a donc $y^3 - my + b = 0$.

Digitized by Google

De plus, $\left.\begin{matrix} +2s^3 \\ -2sdd \end{matrix}\right\}$ répondant à b eſt Poſitif; car $2s$, la Somme, eſt plus grande que $2d$, la Difference. Donc $2s \times ss > 2s \times dd$.

J'ai donc $\left.\begin{matrix} y^3 - 3ssy + 2s^3 \\ -ddy - 2sdd \end{matrix}\right\} = 0$

répondant à $y^3 - my + b$.

Si g & p avoient été toutes deux Négatives,

j'aurois eu $\begin{cases} y = g = -s - d \\ y = p = -s + d \\ 2y = g + p = -2s \end{cases}$

De là il ſuit $y + s + d = 0$

$y + s - d = 0$

$yy + sy + dy + ss + sd - dd = 0$

$+ sy - dy - sd$

$yy + 2sy + ss - dd = 0$

$y - 2s = 0$

$y^3 + 2syy + ssy$

$- 2syy - ddy - 2s^3$

$- 4ssy + 2sdd$

$\left.\begin{matrix} y^3 - 3ssy - 2s^3 \\ - ddy + 2sdd \end{matrix}\right\} = 0$

répondant à $y^3 - my - b$

Car $ss > dd$. Donc $2s \times ss > 2s \times dd$.

Si y répond à la Racine Négative $-2s$, on aura $yy = 4ss$ & $y^3 = 4ss \times -2s = -8s^3$, & ainſi y^3 eſt Négatif de ſa nature. Il faut donc y ajoûter du Poſitif, afin que les trois Membres de l'Equation ſoient équivalens à zero.

Or, $-3ss \times y = -3ss \times -2s = 6s^3$, & $-dd \times y = -dd \times -2s = 2sdd$. Ainſi $-3ss \times y$ & $-dd \times y$, font une Somme Poſitive, & $-m\,(= -3ss - dd) \times y = -2s$, eſt une Grandeur Poſitive.

Digitized by Google

la Négative ſoit égale à la Somme de ces deux, & par conſequent $= 2s$, car $\left.\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}\right\} = 2s$

Qu'on faſſe donc $y = s+d$

$y = s-d$

$2y = 2s$

on aura 1°. $y-s-d = 0$

$y-s+d = 0$

& par conſequent $yy-sy-dy+ss+sd+-dd = 0$

$-sy+dy \quad -sd$

$yy-2sy \quad +ss \quad -dd = 0$

multipliez par $y+2s = 0$

donne $y^3-2syy+ssy-ddy+2s^3-2sdd$

$+2syy-4ssy$

$y^3 \quad -3ssy \quad +2s^3$

$-ddy \quad -2sdd \Big\} = 0$

cela répond à $y^3 \quad -my \quad \overline{+}b = 0$

D'où l'on conclud 1°. que $3ss+dd = m$.

2°. que $\left.\begin{matrix} +2s^3 \\ -2sdd \end{matrix}\right\} = \overline{+}b$.

De la Valeur de *b*.

8. Dans le cas où les deux Racines $s+d$, $s-d$ ſont toutes deux Poſitives, s la moitié de leur Somme, eſt plus grande que d la moitié de leur Difference.

Donc quand j'ai $yy = ss+2ds+dd$; comme $2s \times s > 2s \times d$, on aura $ss+2ss\ (=3ss)+dd > ss+2ds+dd$, & par conſequent $3ss+dd > yy$.

Par conſequent $yy \times y = y^3 < y \times 3ss+dd$.

Par conſequent encore, puiſque $m = 3ss+dd$, $my > y^3$; & par conſequent après avoir dit y^3-my, il faut ajoûter un $+$, afin d'égaler le tout à zero.

On a donc $y^3 - my + b = 0$.

Digitized by Google

De plus, $\left.\begin{matrix} +2s^3 \\ -2sdd \end{matrix}\right\}$ répondant à b eſt Poſitif; car $2s$, la Somme, eſt plus grande que $2d$, la Difference. Donc $2s \times ss \rhd 2s \times dd$.

J'ai donc $\left.\begin{matrix} y^3 - 3ssy + 2s^3 \\ -ddy - 2sdd \end{matrix}\right\} = 0$

répondant à $y^3 - my + b$.

Si g & p avoient été toutes deux Négatives, j'aurois eu $\begin{cases} y = g = -s - d \\ y = p = -s + d \\ 2y = g + p = -2s \end{cases}$

De là il ſuit $y + s + d = 0$

$y + s - d = 0$

$yy + sy + dy + ss + sd - dd = 0$

$+sy - dy - sd$

$yy + 2sy + ss - dd = 0$

$y - 2s = 0$

$y^3 + 2syy + ssy$

$-2syy - ddy - 2s^3$

$-4ssy + 2sdd$

$\left.\begin{matrix} y^3 - 3ssy - 2s^3 \\ -ddy + 2sdd \end{matrix}\right\} = 0$

répondant à $y^3 - my - b$

Car $ss \rhd dd$. Donc $2s \times ss \rhd 2s \times dd$.

Si y répond à la Racine Négative $-2s$, on aura $yy = 4ss$ & $y^3 = 4ss \times -2s = -8s^3$, & ainſi y^3 eſt Négatif de ſa nature. Il faut donc y ajoûter du Poſitif, afin que les trois Membres de l'Equation ſoient équivalens à zero.

Or, $-3ss \times y = -3ss \times -2s = 6s^3$, & $-dd \times y = -dd \times -2s = 2sdd$. Ainſi $-3ss \times y$ & $-dd \times y$, font une Somme Poſitive, & $-m\,(= -3ss - dd) \times y = -2s$, eſt une Grandeur Poſitive.

Digitized by Google

J'ai déja la valeur de $-8s^3+6s^3+2sdd$. Dans le 3e Membre j'ai $2s^3-2sdd$, qui, ajoûtées aux Sommes précedentes, donnent en tout $-8s^3+8s^3=0$.

On a $y^3-3ssy-2s^3-ddy+2sdd$ répondant à y^3-my-b

Ainsi $\left.\begin{matrix}+2s^3\\-2sdd\end{matrix}\right\}=+b$, & $\left.\begin{matrix}-2s^3\\+2sdd\end{matrix}\right\}=-b$.

Donc $\begin{cases}s^3-sdd=\frac{b}{2}\\ sdd-s^3=-\frac{b}{2}\end{cases}$

On a auſſi $\left.\begin{matrix}3ss\\+dd\end{matrix}\right\}=m$. Donc $ss+\frac{dd}{3}=\frac{m}{3}$.

Recherches. 9. Je voudrois pouvoir mettre d'un côté tout le Connu $\frac{m}{3}+\frac{b}{2}$, ou $\frac{m}{3}-\frac{b}{2}$.

Mais pour cela il faudroit mettre dans l'autre Membre de l'Equation $ss+\frac{dd}{3}+s^3=+sdd$, & voila un grand nombre de Quantitez inconnuës, qui multiplieroient l'embarras, & augmenteroient l'obſcurité.

Il me vient en penſée de mettre d'un côté $\frac{m}{3}-\frac{b}{2}$.

De l'autre, je mettrois $\overline{ss+\frac{dd}{3}}$, diminué de $\overline{s^3-sdd}$.

Mais par une telle Souſtraction aucune Grandeur Inconnuë ne s'évanoüit.

Je vois qu'en élevant ss à la 3e Puiſſance & s^3 à la ſeconde, j'ai s^6 de côté & d'autre, cela me fait penſer à cuber $ss+\frac{dd}{3}$ & à carrer s^3-sdd.

Digitized by Google

Puiſque $ss + \frac{dd}{3} = \frac{m}{3}$, j'ai $s^6 + \frac{3s^4dd}{3} + \frac{3d^4ss}{9} + \frac{d^6}{27} = \frac{m^3}{27}$, ou $s^6 + s^4dd + \frac{d^4ss}{3} + \frac{a^6}{27} = \frac{m^3}{27}$.

Puiſque $s^3 - sdd = \frac{b}{2}$. Donc $s^6 - 2s^4dd + ssd^4 = \frac{bb}{4}$; & puiſque $sdd - s^3 = -\frac{b}{2}$. D. $ssd^4 - 2s^4dd + s^6 = \frac{bb}{4}$.

De $s^6 + s^4dd + \frac{ssd^4}{3} + \frac{d^6}{27} = \frac{m^3}{27}$,

ôtez $s^6 - 2s^4dd + ssd^4 = \frac{bb}{4}$,

reſtera $3s^4dd - \frac{2ssd^4}{3} + \frac{d^6}{27} = \frac{m^3}{27} - \frac{bb}{4}$.

Puiſque $3ss > 2ss$

$3ssdd > 2ssdd$

& puiſque $s > d$, ſans quoi $s - d$ ſeroit Négatif, $3ssdd \times ss > 2ssdd \times dd$.

Ainſi le premier Membre eſt Poſitif, & par conſequent le ſecond d^6, & $\frac{m^3}{27} > \frac{bb}{4}$, à moins que, par quelque autre cauſe, le premier Membre ne s'égale à zero.

Cela fait, je cherche ſi quelque attention à la Somme, dont s eſt la moitié, & à la Difference des deux Racines, qui s'évanoüiſſent par le moïen d'une troiſiéme égale à elles deux & ſous un Signe contraire, ne me donneront point de lumiere.

10. En y penſant, je vois qu'il faut diſtinguer les cas. Premier cas.

Car les deux Racines qui s'évanoüiſſent par le moïen d'une 3e, égale à leur Somme, peuvent être égales entre elles, ou inégales.

Digitized by Google

1°. Posons-les d'abord égales : En ce cas, la Difference d est nulle & s'égale à zero.

D. en ce cas, $3s^4dd$, $2ssd^4$, d^6 s'évanoüissent, & le second Membre de l'Equation qui leur est égal, savoir $\frac{m^3}{27} - \frac{bb}{4} = 0$. D. en ce cas $\frac{m^3}{27} = \frac{bb}{4}$.

Je cube donc le tiers de m, & s'il se trouve égal au Quarré de $\frac{b}{2}$, je conclus que y^3 a deux de ses Racines égales.

J'avois $ss + \frac{dd}{3} = \frac{m}{3}$. Donc dans ce cas où $dd = 0$, $ss = \frac{m}{3}$.

Par la même raison, puisque $s^3 - sdd = \frac{b}{2}$, on aura $s^3 = \frac{b}{2}$.

Je prens donc la moitié de b, sa Racine troisiéme, ou sa Racine Cube est la moitié de la Somme des deux Racines ; elle est donc elle-même une des Racines ; car elles sont égales : ainsi $\sqrt[3]{\frac{b}{2}} = y$.

Ou je prens le tiers de m ; j'en tire la Racine Quarrée, & j'ai encore une des Racines égales de y ; car $\frac{m}{3} = ss$. Donc $\sqrt{\frac{m}{3}} = s$.

Ou enfin, puisque $ss = \frac{m}{3}$ & $s^3 = \frac{b}{2}$, on aura $\frac{s^3}{ss} = s = \frac{b}{2}$ divisé par $\frac{m}{3} = \frac{3b}{2m}$.

Divisez donc le triple du dernier Terme par le double du Coëfficient du penultiéme, vous aurez une des Racines égales, & par consequent l'autre : par consequent leur Somme, qui est la 3e Racine.

Digitized by Google

J'ai $y^3 - my + b = 0$. Donc $\frac{3b}{2m} = y$. Donc $y^3 = \frac{27b^3}{8m^3}$, & $-my = \frac{-3bm}{2m}$ & $\frac{27b^3}{8m^3} - \frac{3bm}{2m} + b = 0$.

Donc $\frac{27b^3}{8m^3} = \frac{3bm}{2m} - b = \frac{3b}{2} - b = \frac{3b-2b}{2} = \frac{b}{2}$. Donc $27b^3 = \frac{8bm^3}{2} = 4bm^3$. D. $27bb = 4m^3$ & $\frac{bb}{4} = \frac{m^3}{27}$.

Si j'avois eu $y^3 + my - b = 0$, j'aurois fait $\frac{27b^3}{8m^3} = b - \frac{3bm}{2m} = \frac{2b-3b}{2} = \frac{-b}{2}$ & $27b^3 = \frac{8m^3}{2} \times -b$, & $27bb = 4m^3$ & $\frac{bb}{4} = \frac{m^3}{27}$.

11. II°. Quand les deux Racines qui se détruisent par le moïen d'un Signe contraire de la 3e, qui seule égale leur Somme, sont inégales entre elles. Second cas.

Alors d a de la valeur, & chaque Membre de l'Equation demeurera Positif $\frac{m^3}{27} > \frac{bb}{4}$.

Il faut encore tâcher de tirer quelque lumiere de la comparaison qu'on fera de la Somme des deux Racines avec leur Difference.

La Somme est $2s$, la Difference d.

J'ai $3ss + dd = m$.

Si je quarre la Somme $2s$, j'aurai $4ss$.

Si j'en ôte $3ss + dd$, restera $ss - dd$.

Or $ss - dd$ divise exactement $2s^3 - 2sdd = b$.

Car $\frac{2s^3 - 2sdd}{ss - dd} = 2s$.

Digitized by Google

Outre cela $\frac{2s^3 - 2sdd = b}{ss - dd} = 2s$ Racine de la Somme.

Il faut donc, 1°. Chercher un Quarré plus grand que m; car $4ss = 3ss + ss > 3ss + dd$.

2°. En ôter $m = 3ss + dd$.

3°. Diviser b par le reste, on aura pour Quotient la Grande Racine des deux autres.

4°. Quand j'ai $2s$, j'ai s, puis ss, puis $3ss$.

5°. Je les ôte de $m = 3ss + dd$.

Reste dd, dont la Racine d est la moitié de la Difference des Racines.

Donc $s + d = g$ la Grande Racine, & $s - d = p$ la Petite.

Autrement. $s - d$ est une des deux Racines.

1°. Je la quarre, & j'ai $ss - 2ds + dd$.

2°. J'ôte ce Quarré de $3ss + dd = m$

$ss + dd - 2ds$

reste $2ss + 2ds$

3°. Je divise par ce reste $2s^3 - 2sdd = b$, & j'ai $\frac{2s^3 - 2sdd}{2ss + 2ds} = s - d$; car $2ss + 2ds$, multiplié par $s - d$, donnent $2s^3 + 2dss - 2dds$.

$- 2dss$

Je cherche donc un Quarré plus petit que m Coëfficient du penultiéme Terme.

Je l'ôte de m.

Je divise b, dernier Terme, par le reste.

Le Quotient donne la Petite Racine.

Quand j'ai p, je divise le Cube par $y - p$, & le Quotient me donne le Quarré yy, &c. dont la resolution me découvrira les deux autres Racines.

Pour

Digitized by Google

Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier $\begin{cases} x-g=0 \\ x-f=0 \\ x-p=0 \end{cases}$

on aura $x^3-gxx+gfx-gfp=0$ $\begin{cases} x-p \text{ Diviseur} \\ xx-gx+gf \text{ Quotient} \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -fxx+gpx \\ -pxx+fpx \end{array}$$

Car $xx-gx+gf$
$-fx$
multiplié par $x-p$
donne x^3, &c.

12. J'ai $\begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \\ x-4=0 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} xx-2x+6=0 \\ -3x \\ \hline x-4 \\ \hline x^3-2xx+6x-24=0 \\ -3xx+8x \\ -4xx+12x \\ \hline x^3-9xx+26x-24=0 \end{array}$$

multiplié par

Les deux 1res Racines sont inégales, & la 3e n'en contient point la Somme.

Exemples en Nombres. Demonstration d'un troisiéme cas.

1°. Je fais évanoüir le second Terme, en supposant $x=y+3$,

& j'ai 1°. $x^3=y^3+9yy+27y+27$
2°. $-9xx=-9yy-54y-81$
3°. $+26x=+26y+78$
$-24=0$

$$y^3 \quad -1y \quad =0$$

Donc $y=1$, & $x=1+3=4$.

Par $x-4$, je divise $x^3-9xx+26x-24$, j'ai pour Quotient $xx-5x+6$. Donc $xx-5x+\frac{24}{4}=\frac{1}{4}$, & $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=3$ & $=2$.

Digitized by Google

Soit $x^3 - 14xx + 59x - 70 = 0$.

1°. Je fais $x = y + \frac{14}{3}$,

& j'ai $x^3 = y^3 + 14yy + \frac{196}{3}y + \frac{2744}{27} - 70 = 0$

$-14xx = -14yy - \frac{392}{3}y - \frac{2744}{9}$

$+59y + \frac{816}{5}$

$y^3 - \frac{19}{3}y + \frac{56}{27} = 0$

Si de $\frac{64}{9}$, j'ôte $\frac{19}{3} = \frac{57}{9}$, reſtera $\frac{7}{9}$.

Je diviſe $\frac{56}{27}$ par $\frac{7}{9}$, ou $\frac{56}{27}$ par $\frac{21}{27}$, & j'ai $\frac{56}{21} = \frac{8}{3}$, Racine du Quarré $\frac{64}{9}$.

Cette Racine répond à $2s$, & eſt égale à la Somme des deux autres.

Je prens la moitié, & j'ai $\frac{4}{3} = s$. Je le quarre, & j'ai $\frac{16}{9} = ss$.

Je le triple, & j'ai $3ss = \frac{16}{3}$.

Enſuite de $\frac{19}{3} = m = 3ss + dd$, j'ôte $\frac{16}{3} = 3ss$, reſte $\frac{3}{3} = 1 = dd$. Donc $d = 1$, & $s + d$ (moitié de la Somme + moitié de la Difference) eſt la Grande Racine $= \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

Donc la Petite eſt $\frac{1}{3}$.

Digitized by Google

J'ai en effet $\frac{1}{27} - \frac{1}{3} * \frac{19}{3}\left(= -\frac{19}{9} = -\frac{57}{27}\right) + \frac{56}{27} = 0$

J'ai $\frac{343}{27} - \frac{7}{3} * \frac{19}{3}\left(= -\frac{133}{9} = -\frac{399}{27}\right) + \frac{56}{27} = 0$

J'ai $\frac{512}{27} - \frac{8}{3} * -\frac{19}{3}\left(= +\frac{152}{9} = +\frac{456}{27}\right) + \frac{56}{27} = 0$

Dès que je connois les trois Valeurs de y, je connois les trois de x, car $x = y + \frac{14}{3}$.

Donc $x = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{14}{3} = 5 \\ \frac{7}{3} + \frac{14}{3} = 7 \\ -\frac{8}{3} + \frac{14}{3} = 2 \end{cases}$

Là où le ſecond Membre de l'Equation eſt évanoüi, une Racine Négative égale la Somme des deux Poſitives, ou une Poſitive la Somme des deux Négatives.

13. J'ai connu que 2 répondoit à $-\frac{8}{3}$, parce que ſi $\frac{8}{3}$ étoit Poſitif, $\frac{512}{27}$ ſeroit Poſitif, & $\frac{512}{27} + \frac{56}{27} > \frac{426}{27}$. Remarque.

Mais, ſi dans ce 3e cas, y eſt Négative, y^3 eſt une Grandeur Négative; y Négatif multiplié par $-\frac{19}{3}$, eſt Poſitif.

Pour trouver le Quarré $\frac{64}{9}$, je ſuis allé de Quarré en Quarré; & parce que $\frac{19}{3} = m$ eſt une Fraction, j'ai pris des Quarrez fractionez.

Digitized by Google

$\frac{4}{1} < \frac{19}{3}$. $\frac{16}{4}$ de même. $\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}$ & $\frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}$. $\frac{36}{4} = 9 = \frac{27}{3}$, après en avoir ôté $\frac{19}{3}$, donne $\frac{8}{3}$ pour reſtant, & en diviſant par ce reſte $\frac{56}{27} = b$, je n'ai pas un Quotient qui ſoit la Racine de 9.

$\frac{49}{4} = 12 + \frac{1}{4}$ eſt viſiblement trop grand.

J'eſſaïe le Denominateur 9, & $\frac{49}{9}$ ne me donnent pas non plus un Reſte qui diviſant $\frac{56}{27}$, me donne un Quotient avec les proprietez requiſes.

Je viens à $\frac{64}{9}$, & je trouve ce que je cherche.

Les Commençans ne ſauroient mieux faire que de former d'abord eux-mêmes les Puiſſances, parce qu'en comparant ce qu'ils trouvent avec ce qu'ils doivent en effet trouver, ils ſe fatigueront moins & s'épargneront de l'inquietude, qui ne fait que diſtraire.

Continuation d'Exemples.

14. Soit, par exemple, $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 5 = 0 \\ x - 9 = 0 \end{cases}$

on aura d'abord $xx - 3x + 15 = 0$

$-5x$

enſuite $x - 9 = 0$

$x^3 - 8xx + 15x - 135$

$-9xx + 72x$

$x^3 - 17xx + 87x - 135 = 0$

Pour faire évanoüir le ſecond Terme, je fais $x = y + \frac{17}{3}$. Donc $x^3 = y + \frac{17}{3}$. $xx = y + \frac{17}{3}$,

& j'ai $x^3 = y^3 + 17yy + \frac{289}{3}y + \frac{4913}{27} - 135 \left(= -\frac{3645}{27}\right)$

$-17xx = \quad -17yy - \frac{578}{3}y - \frac{14739}{27}$

$+87x = \quad +\frac{261}{3}y + \frac{13311}{27}$

$y^3 \quad -\frac{28}{3}y - \frac{160}{27} = 0$

Puiſque 9 eſt la grande Valeur de x, pour avoir la plus grande Valeur de y, & par conſequent la Racine qui ſera la Somme des deux autres ;

Je dis $x = y + \frac{17}{3}$. Donc $9 = y + \frac{17}{3}$. Donc $y = 9 - \frac{17}{3} = \frac{27}{3} - \frac{17}{3} = \frac{10}{3}$.

Celà merite d'être long-temps à chercher le Quarré d'où je devrai ôter $\frac{28}{3} = m$; car en diviſant $\frac{160}{27} = b$, il faudra que j'aïe pour Quotient la Racine du Quarré que je dois chercher, pour en ſouſtraire $\frac{28}{3}$; & comme ce Quotient eſt une grande Racine, il ſera donc $\frac{10}{3}$.

Donc le Quarré d'où je dois tirer $\frac{28}{3}$, eſt $\frac{100}{9}$.

De $\frac{100}{9}$ ſi j'ôte $\frac{28}{3} = \frac{84}{9}$, reſte $\frac{16}{9}$.

Je diviſe $\frac{160}{27}$ par $\frac{16}{9}$, c'eſt-à-dire, je le multiplie par $\frac{9}{16}$, & j'ai pour Quotient $\frac{1440}{432} = \frac{10}{3}$, car le commun Diviſeur eſt 144.

Digitized by Google

$\frac{10}{3} = 2s$. Donc $\frac{1000}{27} = y^3$ & $\frac{28}{3} * y = \frac{28}{3} * \frac{10}{3} = \frac{280}{9} = \frac{840}{27}$.

Si à $\frac{840}{27}$ j'ajoûte $\frac{160}{27}$, j'aurai $\frac{1000}{27}$.

De là je conclus que $2s$ eſt Poſitive, & que la grande Racine eſt $+\frac{10}{3}$ parce que y^3 doit être Poſitif pour égaler les deux Sommes ſuivantes, dont la derniere eſt inconteſtablement Negative.

$\frac{10}{3} = 2s$. Donc $\frac{5}{3} = s$. Donc $\frac{25}{9} = ss$. Donc $\frac{25}{3} = 3ss$.

Or $m = \frac{28}{3} = 3ss + dd$. Donc ſi de $m = \frac{28}{3}$ j'ôte $\frac{25}{3} = 3ss$, reſteront $\frac{3}{3} = 1 = dd$.

Donc $d = 1$ & $2d$ la Difference des Racines $= 2$.

La Grande ſera donc $\frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$, & la Petite $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$.

Elles ſeront toutes deux Negatives, & on aura $y^3 = -\frac{8}{27} - \frac{28}{3}y$ $\left(= -\frac{28}{3} * -\frac{2}{3} = +\frac{56}{9} = \frac{168}{27}. \right)$

Donc $-\frac{8}{27} + \frac{168}{27} - \frac{160}{27} = 0$

$y^3 = \frac{28}{3}y - \frac{160}{27}$.

Digitized by Google

J'ai eu $y^3 - \frac{28}{3}y - \frac{160}{27} = \frac{1000}{27} - \frac{840}{27} -$ Remarque.
$\frac{160}{27} = 0$.

Si j'avois eu $- \frac{1000}{27} + \frac{840}{27} + \frac{160}{27}$, ou $y^3 + \frac{28}{3}y + \frac{160}{27} = 0$, l'Equation auroit toûjours été égale à zero. La Racine y auroit donc été de même valeur, mais de differente nature ; Positive dans le premier cas ; Negative dans le second.

Et ainsi quand je change $y^3 - my - b$ en $y^3 + my + b$, je ne fais que changer la même Racine de Positive en Negative.

Quand l'Equation $x^3 \mp cxx \mp mx \mp b = 0$ exprime une Somme qui resulte de trois multiplications de x, égalée à des Racines veritables, soit Positives, soit Negatives, comme $x = 2$
$x = 4$
$x = 6$

D'où resulte $x^3 - 12xx + 44x - 48 = 0$.
En substituant $y + 4 = x$,
On aura $y^3 - 4y = 0$.
Donc $yy = 4$. Donc $y = 2$. Donc $x = y + 4 = 6$.
Et en divisant $x^3 - 12xx + 44x - 48$
par $x - 6 = 0$,
on aura $xx - 6x + 8 = 0$.
D'où on tirera les deux autres Racines.

Digitized by Google

$x - 2 = 0$
$x - 4 = 0$
$xx - 2x + 8$
$\quad - 4x$
$xx - 6x + 8 = 0$
$x - 6 \quad = 0$
$x^3 - 6xx + 8x - 48$
$\quad - 6xx + 36x$
$x^3 - 12xx + 44x - 48$

Si $y + 4 = x$, Donc $x^3 = y^3 + 12yy + 48y + 64$
$-12xx = -12yy - 96y - 192$
$+44x = +44y + 176$
$-48 = -48$
$y^3 \quad - 4y$

$xx - 6x + 8 = 0$. Donc $xx - 6x = -8$.
Donc $xx - 6x + 9 = 9 - 8$. Donc $x - 3 = 1$.
Donc $x = 3 \pm 1 = 4$ & $= 2$.

Conclusion de ce qui precede.

15. Et en general, dès que l'Operation du 3e degré, composé de quatre Termes, dont le premier est 3e Puissance; le second, seconde Puissance; le 3e simple Racine, avec des Coëfficiens, & un 4e Terme connu.

Dès que cette Equation resulte d'une Multiplication de x, égalée avec des Racines réelles, soit Positives, soit Négatives, la Substituée, où le second Terme est évanoüi, sera aussi composée de Racines réelles.

Dernier Cas.

16. Mais tels Coëfficiens peut-on donner au second Terme xx & au 3e x, & tel encore peut être le 4e Terme, qu'il ne sera pas possible d'exprimer en Nombres une Quantité, qui, 1°. élevée au 3e degré, 2°. élevée au second, & multipliée par c, 3°. simple, & multipliée par m, égale le 4e Terme b.

Digitized by Google

Alors aucun Nombre ne pouvant avoir les Rapports neceſſaires avec le Nombre exprimé par b, pour égaler, par les Multiplications où on le fait paſſer, le Nombre b; ce Nombre-là dégenere en une Quantité Incommenſurable; c'eſt-à-dire, dont le Rapport avec la Quantité b ne peut s'exprimer en Nombres.

Dans un tel cas, pendant que l'on ſuppoſera x égale à des Nombres veritables, on ne parviendra jamais à former l'Equation. On en ſuppoſe donc d'Imaginaires, & en combinant ces Imaginaires ſuppoſez, on vient à bout de faire naître l'Equation; & c'eſt comme ſi l'on diſoit, ſi ce que je ſuppoſe étoit réel, l'Equation ſeroit juſte; & la raiſon pour laquelle elle ne ſe juſtifie pas en Nombre, c'eſt que les Nombres que je lui ſuppoſe pour Racines, ne ſont pas réels, mais chimeriques.

Sans doute que l'Equation ne ſe forme pas par la Multiplication de tels Nombres qui ne peuvent pas exiſter; mais elle peut être conçuë naître de la Multiplication de quelques Quantitez qui ne peuvent pas s'exprimer en Nombres, & qui tiendroient réellement la place de ces Nombres, ſuppoſez, s'ils pouvoient être, & en auroient réellement les proprietez.

Lorſqu'une Equation du 3e degré, dont le ſecond Terme eſt évanouï, a des Racines réelles, le Cube du tiers de m $\left(\frac{mm}{27}\right)$ eſt égal au Quarré de la moitié de b $\left(\frac{bb}{4}\right)$, ou il le ſurpaſſe.

Quand cela n'arrive pas, les Racines ne ſont pas réelles.

Alors on en ſuppoſe d'Imaginaires. On voit ce

qui en reſulteroit, & on traite cette Equation comme ſi elle en naiſſoit.

Exemple & preparation. 17. Par exemple, quand j'ai $x^3 - 6x - 16$, $6 = m$, & $16 = b$.

$\frac{m}{3} = \frac{6}{3} = 2$. $\frac{b}{2} = \frac{16}{2} = 8$. Le Cube $\frac{m^3}{27} = 8$. Le Quarré $\frac{bb}{4} = 64$.

Donc cette Equation ne peut pas reſulter de la Multiplication de trois Racines réelles; car quand cela arrive, on a vû, par la generation même d'une telle Equation, exprimée en termes univerſels, que $\frac{m^3}{27}$ ne peut pas être plus petit que $\frac{bb}{4}$.

Si deux Racines ſont égales, on a $x = a$, & $x = a$. Donc $x - a = 0$ & $x - a = 0$, donne $xx - 2ax + aa = 0$, & en multipliant par $x + 2a$,

$$\begin{array}{r} xx - 2ax + aa = 0 \\ x + 2a \\ \hline x^3 - 2axx + aax + 2a^3 \\ \quad + 2axx - 4aax \\ \hline x^3 \qquad - 3aax + 2a^3 = 0 \end{array}$$

on a

répondant à $x^3 \qquad - mx + b$

$a^3 = \frac{b}{2}$, & $a^6 = \frac{bb}{4}$.

$3aa = m$. $aa = \frac{m}{3}$, & $a^6 = \frac{m^3}{27}$.

Il en ſeroit de même, ſi j'avois fait $x + a = 0$. $x + a = 0$, & $x - 2a = 0$, alors j'aurois eu

$$\begin{array}{r} x^3 - 3aax - 2a^3 \\ x^3 - mx \quad - b \end{array}$$

Le Quarré de $-a^3$ eſt toûjours a^6, comme celui de $-\frac{b}{2}$, eſt $\frac{bb}{4}$.

Digitized by Google

Si j'ai $x+a+d=0$
$x+a-d=0$

$xx+ax+dx+aa+ad-dd$
$+ax-dx-ad$

Le Quarré $xx+2ax+aa-dd$
multiplié par $x-2a$

$x^3+2axx+aax-ddx-2a^3$
$-2axx-4aax+2add$

donne $x^3-3aax-2a^3-ddx+2add$

répondant à $x^3 \quad -mx \quad \pm b.$

Or $\frac{m}{3}=aa+\frac{dd}{3}$, ſon Cube $\frac{m^3}{27}=a^6+a^4dd+\frac{aad^4}{3}+\frac{d^6}{27}$.

$\frac{1}{2}b=add-a^3$, ſon Quarré eſt $a^6-2a^4dd+aad^4$.

$\frac{m^3}{27}-\frac{bb}{4}=+a^4dd+\frac{aad^4}{3}+\frac{d^6}{27}=$
$+2a^4dd-aad^4$

$3a^4dd-\frac{2aad^4}{3}+\frac{d^6}{27}=\frac{9a^4dd-2aad^4}{3}+\frac{3d^6}{8}$.

Or $a>d$. D. $a^4>d^4$. D. $dd\times a^4>dd\times aadd$.

Ainſi après avoir ôté $\frac{bb}{4}$ de $\frac{m^3}{27}$, il reſte une Quantité Poſitive, dont $\frac{m^3}{27}$ ſurpaſſe $\frac{bb}{4}$.

Soit donc $y^3-my-b=0$ l'expreſſion univerſellement applicable à de telles Equations.

Qu'on ſe l'imagine reſulter de la Multiplication de ces trois Valeur de y.

$y+s+\sqrt{-3dd}=0$
$y+s-\sqrt{-3dd}=0$
$y-2s=0$

Digitized by Google

Puiſque le ſecond Terme eſt évanoüi, 2 *s* Racine Négative, eſt égale à la Somme des deux Poſitives ſuperieures.

La grande des portions, c'eſt la moitié de la Somme, plus la moitié de la Difference.

La petite, c'eſt la moitié de la Somme, moins la moitié de la Difference.

Le Quarré *d d*, ſous le Signe —, eſt une Quantité imaginaire, comme on l'a prouvé.

En calculant ſuivant cette ſuppoſition, on s'eſt apperçû que — 3 *d d* étoit plus commode que ſimplement — *d d*, & ne donnoit pas de Fraction.

1°. $y + s + \sqrt{-3dd} = 0$

multiplié par $y + s - \sqrt{-3dd} = 0$

donne $yy + sy + y\sqrt{-3dd} + ss - -3dd$
$+ sy + s\sqrt{-3dd}$
$- y\sqrt{-3dd}$
$- s\sqrt{-3dd}$

Quarré $yy + 2sy + ss - -3dd$

$yy + 2sy + ss - -3dd = 0$

$y - 2s = 0$

$y^4 + 2syy + ssy - -3ddy - 2s^3 - 6sdd$; car — × — =
$-2syy - 4ssy$ [+, & + × — = —

Cube y^3 $-3ssy - 2s^3$ $+3ddy - 6sdd$ } répondant à $\begin{cases} y^3 - my - b \\ y^3 + my - b \end{cases}$

Suivant que dans $-3ssy$, $ss \gtrless dd$, ou $ss \lessgtr dd$.
$+3ddy$

C'eſt une preuve que la moitié de la Somme eſt plus grande ou plus petite que *d*.

On previent une Objection.

18. A la verité, quand on a pour Grande Racine $s + d$, & pour Petite $s - d$, *s* moitié de la Somme, ne peut jamais être plus petite que *d*,

Digitized by Google

moitié de la Difference, à moins que la Petite ne ſoit Négative; car ſi $s < d$, faiſons $d = s + a$.

Nous aurons pour la Grande Racine $s + d$, ſon égale $s + s + a = 2s + a$, & la Petite $s - d$, ſeroit $= s - s - a = -a$. Elle ſeroit donc Négative.

Si par exemple la Grande eſt 16, la Difference 12, & la Somme 10, dont la moitié 5, eſt plus petite que 6, moitié de la Difference, on auroit pour petite Racine $5 - 6 = -1$.

La Grande Racine étant 16, & la Difference 12, ſi la Petite étoit $16 - 12 = 4$, la Somme ſeroit 20 & 10, moitié de cette Somme, ſeroit plus grande que 6, moitié de la Difference; mais cela n'aura pas lieu ſi la Grande eſt $5 + 5 + 6 = 16$, & la Petite eſt $5 - 5 - 6 = -6$; car alors la Somme eſt $5 + 5 + 6 - 6 = 10$.

Mais la Difference de $+16$ à $-6 = 22$, car $22 - 6 = +16$.

Si d étoit la moitié de la Difference, s moitié de la Somme, ne pourroit pas être plus petite que d, dans le cas de l'Equation propoſée, quand les deux Racines ſuperieures ſeroient Poſitives.

Mais il faut remarquer que la moitié de la Difference n'eſt pas d, mais $\sqrt{-3dd}$, qui eſt Imaginaire.

On a donc $-3ss = \pm m$, & $ss - dd = \pm \frac{m}{3}$.

$+3dd$

On a encore $2s^3 = b$, & $s^3 + 3sdd = \frac{b}{2}$.

$6sdd$

Quand même on feroit $ss + dd = \frac{m}{3}$, on auroit

$\frac{m^3}{27} = s^6 + 3s^4dd + 3d^4ss + d^6$.

Digitized by Google

Mais $\frac{b}{2} = s^3 + 3sdd$. Donc $\frac{bb}{4} = s^6 + 6s^4dd + 9ssd^4$.

Donc $\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27} = 3s^4dd + 6ssd^4 - d^6$.

Or $d^6 = d^4 \times dd < d^4 \times ss$. Donc $3s^4dd + 6ssd^4 - d^6$ eſt un reſte poſitif, dont $\frac{bb}{4}$ ſurpaſſe $\frac{m^3}{27}$.

Si les trois Racines étoient $\begin{cases} y - s + \sqrt{-3dd} = 0 \\ y - s - \sqrt{-3dd} = 0 \\ y + 2s = 0 \end{cases}$ il n'y a qu'à en faire le Produit, & on viendra aux mêmes Equations, ſavoir de $ss - dd = \pm\frac{m}{3}$; & $s^3 + 3sdd = \frac{b}{2}$.

Application. 19. Rendons-nous attentif, comme ci-devant, aux rapports des Sommes s, & des Differences d; ou des portions de la Somme $2s$.

$4ss$ eſt le Quarré de la Somme $2s$.

Ajoûtons-lui $\pm m = -3ss + 3dd$, on aura $4ss - 3ss + 3dd = ss + 3dd$.

Or $b = 2s^3 + 6sdd$, diviſé par $ss + 3dd$ $(= 4ss \pm m)$ donne pour Quotient $\frac{2s^3 + 6sdd}{ss + 3dd} = 2s$.

1°. Qu'on prenne donc un Quarré.

2°. Qu'on y ajoûte $+m$, ou $-m$, en un mot m avec ſon Signe.

3°. Qu'on diviſe $+b$ par cette Somme.

On aura une Racine réelle en nombres, ſi le Quotient de la Diviſion diviſe ſans reſte; & ſi, multiplié par lui-même, il reproduit le Quarré ajoûté à m.

Car $2s$ une telle Racine eſt la ſeule qui ne ſoit pas Imaginaire.

Digitized by Google

20. J'ai $y^3 - 9y - 28 = 0$. Exemple en Nombres.

A 16 j'ajoûte -9, & j'ai $16 - 9 = 7$.

Je diviſe 28 par 7, & j'ai pour Quotient exact 4, Racine de mon Quarré 16. D'où je conclus que $4 = 2s$ eſt ma Grande Racine.

Mais je ne puis pas continuer & dire $4 = 2s$. Donc $2 = s$. Donc $4 = ss$.

Or $ss - dd = \frac{m}{3}$. Donc ici $ss - dd = 3$; car à $9y$ répond my, & à 9 répond m. Donc à $\frac{m}{3}$ répond $\frac{9}{3} = 3$. Donc $4 - dd = 3$. D. $4 - 3 = dd$. Donc $dd = 1$, & $d = 1$.

Effectivement dans les Racines de mon Equation, quand j'ai $\sqrt{-3dd}$, ou Racine de $-dd \times 3$, cela répond à -1×3 : mais cette Difference n'eſt pas 3, ni $\sqrt{3}$, mais $\sqrt{-3}$, qui eſt Imaginaire.

Si à 2, moitié de $4 = 2s$, j'ajoûte la Difference $\sqrt{-3}$, j'aurai $y^3 = 2 + \sqrt{-3}$.

Comme $2s = 4$ a été Poſitive.

Pour faire $y^3 - 9y - 28 = 0 = 64 - 36 - 28 = 0$.

Les deux autres Racines dont la Somme eſt $2s = 4$, ſont Négatives, & ainſi $y^3 = -2 + \sqrt{-3} = -8 + 12\sqrt{-3} + 18 (= 3 \times -3 \times -2) - 3\sqrt{-3} = -8 + 18 + 9\sqrt{-3}$.

$$y = -2 + \sqrt{-3}$$

Multipliez-le par $\quad -9$

on aura $\quad 9y = +18 - 9\sqrt{-3}$

qui ajoûtez à $y^3 = -8 + 18 + 12\sqrt{-3} - 3\sqrt{-3}$,

ou $-8 + 18 + 9\sqrt{-3}$

$+18 - 9\sqrt{-3}$

donne $y^3 - 9y = -8 + 36$.

Digitized by Google

Donc $y^3 - 9y - 28 = 0 = -8 + 12\sqrt{3} + 36 - 28 = 0 = -8 + 36$
$-3\sqrt{3}$ $[-28 = 0$
$-9\sqrt{3}$

Il en ſera de même, ſi on fait $y = -2 - \sqrt{-3}$.

Neceſſité d'une autre Méthode.

21. J'ai $y^3 - 6y - 16 = 0$.

$6 = m$, & $2 = \frac{m}{3}$, $16 = b$, & $8 = \frac{b}{2}$.

$\frac{m^3}{27} = 8$. $64 = \frac{bb}{4}$. Donc le Cube de $\frac{m}{3}$ eſt plus petit que le Quarré de la moitié de b, & cette Equation a deux Racines Imaginaires.

Je cherche enſuite un Quarré, auquel joignant -6, & diviſant par cette Somme 64, j'aïe pour Quotient la Racine de ce Quarré.

Je n'en trouve point, $4 - 6$ eſt trop petit; $9 - 6$ ne diviſe pas exactement 64; $16 - 6$ non plus: $25 - 6$ a le même défaut, & n'eſt point cinq fois en 64; $36 - 6$ y eſt encore moins ſix fois.

En vain je parcourerai les Quarrez fractionez juſqu'à ce que j'en aïe trouvé un de la grandeur de 25, qui eſt trop grand.

Il faut donc avoir recours à une autre Méthode.

On la cherche.

22. Je conſtruis une Equation, comme ci-devant, avec deux Racines Imaginaires, dont la réelle ſoit la Somme, & j'ai, comme auparavant, $ss - dd = \pm\frac{m}{3}$.

J'ai encore $s^3 + 3sdd = \frac{b}{2}$.

Je cube la premiere, & je quarre la ſeconde de ces Quantitez: Méthode qui m'a déja réüſſi une fois, & j'ai $s^6 - 3ddss^4 + 3ssd^4 - d^6 = \frac{m^3}{27}$, & j'ai encore $s^6 + 6s^4dd + 9ssd^4 = \frac{bb}{4}$.

Comme

Digitized by Google

Comme dans ce cas $\frac{bb}{4} > \frac{m^3}{27}$, j'ôte la premiere Somme de la seconde, & il me reste $9s^4dd + 6ssd^4 + d^6$.

Ce reste est un vrai Quarré dont la Racine est $3ssd + d^3$.

Donc $3ssd + d^3 = \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}$.

Je cherche à connoître s, & à le dégager de d, car $2s$ me donnera ma Grande Racine.

Je vois que $d^3 + 3ssd$ est le commencement d'un Cube, qui auroit pour Racine $d + s$. Je l'acheve, & j'ai $d^3 + 3ssd + 3sdd + s^3$.

Par là je comprens qu'à $3ssd + d^3 = \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}$, si j'ajoûte $s^3 + 3sdd = \frac{b}{2}$, j'aurai $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}} = s^3 + 3ssd + 3sdd + d^3$.

Donc $s + d = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}}$.

Il faut trouver moïen de se débarasser de d.

$ss - dd = \pm\frac{m}{3}$, je divise donc $ss - dd$ par $s + d$, & son égale $\pm\frac{m}{3}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}} = s + d$,

& j'ai $\frac{ss - dd}{s + d} = s - d = \frac{\pm\frac{m}{3}}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}}}$.

Digitized by Google

Donc $s+d+s-d = 2s = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27}}}$

$$+\frac{+\frac{m}{3}}{\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27}}}}.$$

Dès qu'on a $2s$, on a s, puis ss, puis s^3, puis $2s^3$, puis $6s$.

Or $s^3+3sdd = \frac{b}{2}$. Donc $\frac{b}{2}-s^3 = 3sdd$.

Dès que je connois $3sdd$, en divisant par s connuë, j'ai $3dd$.

Voila donc $3dd$ connus. Qu'on l'ajoûte à s connuë, on aura la Grande Racine connuë $s+\sqrt{-3dd}$ & la Petite sera $s-\sqrt{-3dd}$.

Application à un Exemple.

23. Aïant donc $6 = m$, j'ai $2 = \frac{m}{3}$, & $8 = \frac{m^3}{27}$.

Aïant $16 = b$, j'ai $8 = \frac{b}{2}$, & $64 = \frac{bb}{4}$.

Donc $\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27} = 64-8 = 56$.

Donc $\sqrt[2]{\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27}} = \sqrt[2]{56}$.

Donc $\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt[2]{\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27}}} = \sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}$.

D. $\frac{\frac{m}{3}}{\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt[2]{\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27}}}} = \frac{\frac{6}{3}}{\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}}$.

Donc $y = \sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+\frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}} = 2s$.

Digitized by Google

Donc $\frac{1}{2}\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+\sqrt[3]{8-\sqrt[2]{56}}=s$.

Donc $ss=\frac{1}{2}\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+\sqrt[3]{8-\sqrt[2]{56}}$,

$$\&\ \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+3\sqrt[3]{8-\sqrt[2]{56}}=3ss.$$

Or $3ss-3dd=m$. Donc $3ss-m=3dd$.

$$\text{Donc } \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+3\sqrt[3]{8-\sqrt[2]{56}}-6=3dd.$$

$$\text{D. } s+\sqrt{-3dd}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+\sqrt[3]{8-\sqrt[2]{56}}+\sqrt{-\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{8+\sqrt[2]{56}}+\sqrt[3]{8-\sqrt[2]{56}}-6}.$$

24. Dans l'Equation $y^3-my=\pm b$, $-my$ étant Négatif, il faut que m ſoit Poſitif. Donc $\frac{m^3}{27}$ eſt un Cube Poſitif, & quand on le retranche de $\frac{bb}{4}$, on le met ſous le Signe —, & on écrit $\frac{bb}{4}-\frac{m^3}{27}$. Remarque.

Mais dans $y^3+my=\pm b$, m eſt Négatif, puiſqu'il fait avec $-y$ le Produit Poſitif $+my$.

Donc $\frac{m}{3}$ eſt Négatif & $\frac{m^3}{27}$ eſt auſſi Négatif & vaut $-\frac{m^3}{27}$, de ſorte que ſi on l'ôte de $\frac{bb}{4}$, on aura $\frac{bb}{4}+\frac{m^3}{27}$.

25. Equat. du 3e degré. $\left\{\begin{matrix} x^3*-mx-b \\ x^3*+mx-b \\ x^3*-mx+b \end{matrix}\right\}=0$. Nouveaux cas.

Digitized by Google

Donc $\begin{cases} x^3 = mx + b \\ x^3 = -mx + b \\ x^3 = mx - b \end{cases}$

Soit $x = y + z$. Donc $x^3 = y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3$, & $mx = my + mz$.

Donc $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 = \begin{cases} + my + mz + b \\ - my - mz + b \\ + my + mz - b \end{cases}$

Comme y & z ſont indeterminées, il eſt poſſible que leurs Valeurs ſoient telles que $3yyz + 3zzy = my + mz$, auquel cas $y^3 + z^3 = b$.

Si $3yyz + 3zzy = my + mz$

Donc $m = \frac{3yyz + 3zzy}{y + z} = 3yz$.

Donc $z = \frac{m}{3y}$, & $zy = \frac{m}{3}$. Donc $z^3 = \frac{m^3}{27y^3}$.

Si $y^3 + z^3 = b$. Donc $y^3 + \frac{m^3}{27y^3} = b$.

Multipliant chaque Terme par y^3, on aura $y^6 + \frac{m^3}{27} = by^3$. D. $y^6 - by^3 = -\frac{m^3}{27}$. D. $y^6 - by^3 + \frac{bb}{4} = -\frac{m^3}{27} + \frac{bb}{4}$.

Donc $y^3 - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}$. Donc $y^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}$. Donc $y = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{bb - \frac{m^3}{27}}}$.

Après avoir connu y, pour connoître x, il faut connoître z, parce que $x = y + z$.

Nous avons $y^3 + z^3 = b$. Donc $z^3 = b - y^3$.

Or $y^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}$.

Donc $z^3 = b - \frac{b}{2} \left(= \frac{b}{2} \right) - \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}$, &

Digitized by Google

$z = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}}$, & $y + z = x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt[2]{bb - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}}$.

Dans l'Equation $y^3 + 3yyz$, &c. $= -my - mz + b$, il faudra changer les Signes de m, & on aura $x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt[2]{\frac{bb}{4} + \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt[2]{\frac{bb}{4} + \frac{m^3}{27}}}$.

Et dans le 3e il faudra mettre b sous un autre Signe, & dire:

$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt[2]{\frac{bb}{4} - \frac{m^3}{27}}}$.

De la Méthode de changer la Valeur des Racines.

26. J'ai differé jusqu'à ce que je fusse parvenu aux Equations du 3e degré, à expliquer de quelle maniere on multiplie, on divise, on augmente enfin par Addition, ou on diminuë par Soustraction une Racine, quoiqu'on n'en connoisse pas la valeur, afin de n'y pas revenir deux fois, & parce que dans les Equations du second degré l'Operation est trop facile.

J'ai $x^3 - cx^2 + mx - b = 0$. Je veux multiplier la Racine x par a.

1°. Je fais $ax = y$. Donc $x = \frac{y}{a}$. D. $x^2 = \frac{yy}{aa}$. $x^3 = \frac{y^3}{a^3}$.

J'ai donc $\frac{y^3}{a^3} + \frac{cyy}{aa} + \frac{my}{a} - b = x^3 + cxx + mx - b = 0$.

Mais $y = ax$. Donc $y^2 = a^2x^2$. $cyy = caaxx$. $my = max$.

Digitized by Google

Donc $y^3 + cyy + my$, c'eſt le reſultat de la Racine xa, miſe en Equation.

De plus, quand j'ai $\frac{y^3}{a^3} + \frac{cyy}{aa} + \frac{my}{a} - b = x^3 + cxx + mx - b = 0$.

Si je multiplie chaque Terme par a^3, j'aurai $y^3 + cayy + myaa - ba^3 = 0$.

Je conſerve l'Egalité avec zero, & il ſe trouve par là que $y^3 = a^3x^3$. On a donc dans cette Equation $= 0$. $y = ax$.

Je multiplie le premier Terme par 1, le ſecond par a, le 3e par aa, le 4e par a^3, ſuivant la Progreſſion Geometrique $\dot{\dot{:}}$ 1. a. aa. a^3.

Quand je voudrai doubler x, je me ſervirai de de la Progreſſion $\dot{\dot{:}}$ 1. 2. 4. 8. 16, où 2 répond au Signe univerſel a, j'aurai $y^3 + 2cyy + 4my - 8b = 0$, où $y^3 = 8x^3$, dont $\sqrt{}$ eſt $2x$.

J'ai $x^3 - 1xx - 14x + 24 = 0$.

Je trouve $x = \begin{cases} +2 \\ +3 \\ -4 \end{cases}$

Je fais $2x = y$, & par conſequent $\frac{y}{2} = x$.

Donc $\frac{y^3}{8} - \frac{yy}{4} - \frac{14y}{2} + 24$, ou $\frac{y^3}{8} - \frac{yy}{4} - 7y + 24 = x^3 - xx - 14x + 24 = 0$.

Or ſi $\frac{y^3}{8} - \frac{yy}{4} - 7y + 24 = 0$.

J'aurai en multipliant chaque Membre par 8 $y^3 - \frac{8yy}{4} - 56y + 192 = 0$, ou $y^3 - 2yy - 56y + 192 = 0$.

Ce qui me donne $y = \begin{cases} +4 = 2 \times 2 \\ +6 = 2 \times 3 \\ -8 = 2 \times -4 \end{cases}$

Digitized by Google

$y^3 = -8 \times -8 - \times 8 = -512 \quad -56 \times -8$
$-2yy \quad = -128 \quad +192$
$-640 \quad +640$
& $y^3 = 4 \times 4 \times 4 = +64 = -2 \times 4 \times 4$
$+192 \quad -56 \times 4$
$+256 \quad -256$

Quand je voudrai tripler la Racine, je multiplierai par 1. 3. 9. 27. 81, &c.

Quand il y a des Termes évanoüis, je place ſous le Terme évanoüi le Terme de la Progreſſion qui lui doit répondre; car je ſuppoſe ce Terme rétabli, & qu'il eſt toûjours = 0, par le moïen des Quantitez qui ſe détruiſent ſous des Signes contraires.

Je veux diviſer par a la Racine x de l'Equation $x^3 - cxx + mx - b = 0$.

1°. Je fais $\frac{x}{a} = y$. Donc $x = ay$. D. $xx = aayy$. Donc $x^3 = a^3y^3$.

2°. Je fais les ſubſtitutions, & j'ai $a^3y^3 - caayy + may - b = x^3 - cxx + mx - b$.

Pour conſerver l'Egalité à zero, je diviſe tout par a^3, & j'ai $y^3 - \frac{cyy}{a} + \frac{my}{aa} - \frac{b}{a^3} = 0$.

Dans cette Equation $y^3 = \frac{x^3}{a^3}$, puiſque $a^3y^3 = x^3$.

Ces Diviſions ſuivent la Progreſſion $\div$ 1. a. aa. a^3, &c.

Donc ſi je veux diviſer la Racine x par 2, je me ſervirai de la Progreſſion $\div$ 1. 2. 4. 8. 16, &c.

Si je veux diviſer par 3, j'emploïerai la Progreſſion $\div$ 1. 3. 9. 27, &c.

J'ai $x^3 - mx - b = 0$.

Je veux augmenter x de c, & avoir une Equation dont la Racine ſoit $= x + c$. Je fais $y = x + c$. Donc $x = y - c$.

A la place de x & des Puiſſances, je mets $y-c$ & ſes Puiſſances,

& j'ai $x^3 = y^3 - 3cyy + 3ccy - c^3 = 0$
$-mx =$ $-my + mc$
$-b$

Après avoir reſolu cette Equation, on aura la valeur de y; par conſequent celle de $x+c$; car en ôtant c de y connuë, on aura x, & en lui ajoûtant c connuë, on aura $x+c$.

Par cette Méthode on rétablit un ſecond Terme.

Remarques ſur la Méthode de faire évanoüir le ſecond Terme.

27. Je n'ai point parlé de faire évanoüir le ſecond Terme d'une Equation du ſecond degré. La Méthode dont je me ſuis conſtamment ſervi pour les reſoudre eſt courte & très-naturelle, & la ſuite évidente de la nature même de ces Equations. L'autre n'eſt pas ſi naturelle, & devient plus longue par ſes réductions.

Quand j'ai $xx - cx + b = 0$, ſi je fais $x = y + \frac{c}{2}$,

j'aurai $yy + cy + \frac{cc}{4} = xx$

$-cy - \frac{cc}{2} = -cx$

Donc yy * $-\frac{cc}{4} + b = 0$. D. $yy = \frac{cc}{4} - b$,

& $y = \pm\sqrt{\frac{cc}{4} - b}$.

Or $x = y + \frac{c}{2}$. D. $x = y + \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - b}$.

J'ai viſiblement plûtôt fait de dire $xx - cx = -b$.

D. $xx - cx + \frac{cc}{4} = \frac{cc}{4} - b$. D. $x = \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{cc}{4} - b}$.

Demonſtration.

28. x eſt une Racine quelconque, & m marque le degré d'une Puiſſance en general. x^m repreſente

donc tous les premiers Termes, ou quelque premier Terme que ce ſoit. $\pm nx^{m-1}$ repreſentera le ſecond avec ſon Coëfficient; car la Puiſſance de la Racine y eſt abaiſſée d'un degré.

On ſuppoſera $x = y \pm z$ D. $x^m = y^m \pm mzy^{m-1}$.

Dès-là le 3e, on aura $nx^{m-1} = \pm ny^{m-1} \pm nz^{m-1}$.

On ſuppoſera $\pm ny^{m-1} = \pm m\zeta y^{m-1}$; car cela eſt neceſſaire pour faire évanoüir le ſecond Terme, où y eſt élevée d'un degré moins que dans le premier.

Dès que j'ai $\pm ny^{m-1} = \pm mzy^{m-1}$, il faut que $n = mz$, & $\zeta = \frac{n}{m} =$ au Coëfficient du ſecond Terme, diviſé par l'Expoſant de la Puiſſance du premier.

Ainſi, quand je change x en y, pour faire évanoüir le ſecond Terme, il faut que je joigne à y le Coëfficient du ſecond Terme, diviſé par l'Expoſant du premier, & cela ſous un Signe contraire à celui du ſecond Terme de la Propoſée $x^m \pm nx^{m-1}$.

29. Entre les Transformations qui ſervent à reſoudre les Egalitez, je ne dois pas oublier celles de M. Varignon, Memoires de l'Academie 1699.

Soit $\zeta\zeta + p\zeta + q = 0$.

Qu'on faſſe $z = x - y$. Donc $zz = xx - 2xy + yy$.

Puiſque $z = x - y$, on aura $2y \times z = 2xy - 2yy$, & $-2yz = -2xy + 2yy$.

Or $xx - 2xy + yy = xx - 2xy + 2yy - yy$.

Donc $xx - 2xy + yy = xx - 2yz - yy$.

Mais ſi $zz = xx - 2xy + yy$, $= xx - 2yz - yy$, on aura $zz + 2yz + yy = 0$, & puiſque $-xx$

$zz + pz + q = 0$, on aura $p\zeta = 2yz$, & $q = yy - xx$.

Digitized by Google

Or ſi $pz = 2yz$. D. $p = 2y$. D. $y = \frac{1}{2}p$, &

& $yy = \frac{pp}{4}$, & $q = \frac{pp}{4} - xx$. D. $xx = \frac{pp}{4} - q$.

Donc $x = \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$.

Si on avoit eu $zz - pz + q = 0$, on auroit fait $z = x + y$.

Dès que j'ai $x - y = z$. $x = \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$. $y = \frac{1}{2}p$, j'aurai $z = x - \frac{1}{2}p = -p \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$.

De $zz + pz - q = 0$, je concluërai que $z = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$.

De $zz - pz + q = 0$, j'aurai $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$.

Enfin, de $zz - pz - q$, viendra $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$.

Remarque ſur l'utilité des Transformations.

30. Il eſt bon de s'accoûtumer à exprimer les mêmes veritez ſous des Signes differens, qui, par la combinaiſon qu'on en fera, deviennent équivalens; on ſe forme par là à une heureuſe habitude, par où l'on vient à découvrir les expreſſions les plus propres pour amener à une ſolution. De plus, quand les Problêmes ſont difficiles par leur ſubtilité & par leur compoſition, il eſt bon d'en tenter la ſolution par diverſes voies; la concluſion en ſera plus ſûre, quand on y ſera arrivé par divers chemins. Enfin, ces Transformations & les comparaiſons qu'on en fait, ſont d'un grand uſage dans la Theorie des Courbes & pour la découverte des *Lieux*.

Digitized by Google

Mais pour ſe former une idée plus claire & plus diſtincte des Equations, de leurs eſpeces & de la diverſité de leurs Racines, je ne crains pas de dire qu'il faut les compoſer premierement ſoi-même, les voir naître, & tirer de cette vûë la connoiſſance de leurs proprietez, & les fondemens de leurs ſolutions.

Avis ſur la maniere d'étudier.

31. C'eſt par l'habitude que l'on prend d'étudier ainſi les choſes par leur origine, que l'on ſe met en état de pouſſer les autres Sciences. Un Algebriſte, qui n'eſt pas toûjours curieux de voir bien clair, ne laiſſe pas d'acquerir une certaine force de genie & une certaine facilité de tirer des Conſequences, & de les enchaîner l'une à l'autre; mais faute de s'être accoûtumé à la lumiere & à la parfaite évidence, il lui arrive en Phyſique, en Morale, &c. de bâtir ſur une conjecture que la multitude des Conſequences qu'il en tire, lui fait enſuite regarder comme très-feconde & très-certaine. Il prête à une ſuppoſition qu'il ne comprend point la fecondité de ſon propre genie & de l'activité dont il s'eſt fait une habitude.

Pour le troiſiéme Degré.

32. Soit $z^3 + pz + q = 0$, & par conſequent que le ſecond Terme ſoit évanoüi.

Soit $z = x - y$, on aura $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$.

On a $-3xyz = -3xy \times x - y$; c'eſt-à-dire, $-3xyz = -3xxy + 3xyy$.

Donc $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3 = x^3 - 3xyz - y^3$.

Donc $z^3 + 3xyz + y^3 = 0. = z^3 + pz + q.$
$- x^3$

Donc 1°. $3xyz = pz$. Donc $3xy = p$. D. $y = \frac{p}{3x}$.

2°. $q = y^3 - x^3$. Donc $q = \frac{p^3}{27x^3} - x^3$.

Donc $qx^3 = \frac{p^3}{27} - x^6$. Donc $x^6 + qx^3 = \frac{p^3}{27}$.

C'eſt une Equation du ſecond Degré pour premiere Racine x^3, & pour ſeconde $\frac{1}{2}q$.

Donc $x^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$.

On a $q = y^3 - x^3$. Donc $y^3 = q + x^3$; & comme $x^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}$,

on aura $y^3 = \frac{1}{2}q\left(q - \frac{1}{2}q\right) + \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Or $z = x - y = \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{y^3}$.

D. $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

On voit par là que de $z^3 \pm pz \pm q$, naîtront

$z = \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}} \mp \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} \pm \frac{p^3}{27}}}$.

Et comme $y = \frac{p}{3x}$, & que $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}}$; il ſuit que $y = \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$.

D. $z = x - y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$.

Donc de $z^3 \pm pz \pm q$, viendra

$z = \sqrt[3]{\pm\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} \pm \frac{p^3}{27}}} \pm \frac{p}{3\sqrt[3]{\pm\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} \pm \frac{p^3}{27}}}}$.

Digitized by Google

33. Quand la Racine Cube de $\pm\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{qq}{4}\pm\frac{p^3}{27}}$ ne pourra pas s'exprimer par des Nombres, z ſera un Incommenſurable ; & on a la méthode de trouver en lignes la Racine troiſiéme de

$\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{qq}{4}\pm\frac{p^3}{27}}$, lorſque q & p ſont connuës.

Cette évaluation de z exprimée dans une Formule commune à tous les cas, eſt très-ingenieuſe, très-élegante, & fait un veritable plaiſir à ceux qui ont du goût pour des beautez de cette nature.

CHAPITRE XXIII.

Des Racines Imaginaires.

J'Ai encore differé juſques ici à parler des Racines Imaginaires, afin qu'elles donnaſſent moins de ſurpriſe quand on comprendroit par le reſultat de quelques Equations ce qui a donné lieu à y penſer.

1. Si je ſuppoſois $xx - 4x = -7$, je devrois conclure que $xx - 4x + 4 = 4 - 7 = -3$. Ce que c'eſt.

Donc $x - 2 = \sqrt{-3}$, & $x = 2 \pm \sqrt{-3}$.

Or cette $\sqrt{-3}$ n'eſt ni la Racine d'un vrai Quarré en nombres, ni la Racine d'un Incommenſurable ; parce que ſi les deux Racines d'un Quarré ſont affectées du ſigne +, leur Quarré aura le même ſigne ; & ſi elles ſont affectées du ſi-

Digitized by Google

gne —, leur Produit ſera encore ſous le ſigne +.

Afin qu'un Produit ſoit ſous le ſigne —, il faut qu'une de ſes Racines ſoit ſous le ſigne +, & l'autre ſous le ſigne —.

$+3 \times -3 = -9$. Mais alors — n'eſt pas un Quarré, parce qu'il n'eſt pas le Produit de deux Racines égales, + 3 n'étant pas la même choſe que — 3.

De ſorte que l'Analyſe de cette Equation $xx - 4x = -7$ me conduiſant à une impoſſibilité, je conclus que cette ſuppoſition eſt fauſſe, & qu'on ne ſçauroit trouver ni en nombres, ni en lignes, aucune grandeur x qui, multipliée par elle-même, & par 4, faſſe naître $xx - 4x + 7 = 0$.

Application & éclairciſſement.

2. Si je partage un Diametre cb en huit parties égales, & que ab ſoit un $\frac{1}{8}$, je puis conſiderer cette ligne ab comme l'unité.

Le Rectangle ſous ab & ac ſera $= 7 \times 1 = 7$, & le Quarré de la Perpendiculaire af ſera auſſi $= 7$. Si j'appelle le Diametre c, & cf, x, j'aurai $ab = c - x$.

Dès-là $cx - xx =$ au Quarré de $af = 7$.

Par conſequent $xx - cx = -7$.

Mais comme le Diametre c eſt partagé en huit parties, dont ab la $\frac{1}{8}$ eſt conſiderée comme l'Unité, il faut dire que $c = 8$, & j'aurai $xx - 8x = -7$. Par conſequent il eſt faux que $xx - 4x$ ſoit $= -7$.

On peut bien prendre pour l'Unité quelque portion qu'on voudra ; mais après avoir determiné une portion pour être l'Unité, il n'eſt pas permis, dans la même Equation, d'en prendre une autre.

Digitized by Google

Quand je dis $xx - cx = xx - 4x$, je partage le Diametre c en quatre parties égales. Alors si, sur la 3e Division, j'éleve une Perpendiculaire, j'aurai le Rectangle $1 * 3 =$ au Quarré de cette Perpendiculaire, laquelle sera $= \sqrt{3}$.

J'aurai $4x - xx = 3$, ou $xx - 4x = -3$.

Par conſequent $xx - 4x + 4 = 4 - 3 = 1$.

Donc $x - 2 = \sqrt{1} = 1$, & $x = 2 \pm 1 = 3$, & $= 1$.

Ce ſont là les deux portions dans leſquelles le Diametre $c = 4$ a été partagé.

3. Quand une ſuppoſition qui renferme une fauſſeté conduit à une ſolution qui doit donner la Racine d'un Quarré affecté du ſigne —, cette Racine s'appelle donc Imaginaire. **En quel ſens on calcule les Imaginaires.**

Ces Racines Imaginaires, qui n'ont aucune exiſtance, & ne peuvent être, s'expriment pourtant par leurs ſignes $\sqrt{-b}$. Quelle idée doit-on ſe former là-deſſus ? Je vais l'expliquer.

Si ces Racines, au lieu d'être impoſſible, étoient poſſibles, $\sqrt{-b}$ ſeroit leur vrai ſigne.

Si elles étoient poſſibles, on les ajoûteroit, on les multiplieroit, elles donneroient lieu à des Souſtractions & à des Diviſions. Je vais montrer de quelle maniere ſe feroient ces Additions, ces Multiplications & ces Diviſions.

4. $2\sqrt{-3} = \sqrt{4} * \sqrt{-3}$. Donc ſi ces deux Racines étoient réelles, on pourroit les multiplier, & leur multiplication donneroit pour Produit $\sqrt{-12}$. Ainſi $2\sqrt{-3} = \sqrt{-12}$. **Multiplication.**

Par la même raiſon $5\sqrt{-3}$ ſeroit $= \sqrt{-75}$.

5. Donc $\sqrt{-75} + \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3} + 5\sqrt{-3} = 7\sqrt{-3} = \sqrt{-147}$. **Addition.**

Digitized by Google

Eclairciſſement. 6. C'eſt là une Operation hypotetique. Si elles étoient vraies, on les traiteroit de cette maniere ; & pendant qu'on les ſuppoſe vraies, on les traite ainſi, pour voir à quoi cette ſuppoſition & ſes ſuites aboutiſſent.

Par exemple, ſi je ſuppoſois 2 valeurs à x, & que je fiſſe $x = 2 + \sqrt{-3}$, & $x = 2 - \sqrt{-3}$, j'aurois

$$x - 2 - 1\sqrt{-3} = 0$$
$$x - 2 + 1\sqrt{-3} = 0$$

$$xx - 2x - x\sqrt{-3} + 4 - x - 3$$
$$- 2x + 2\sqrt{-3}$$
$$+ x\sqrt{-3}$$
$$- 2\sqrt{-3}$$

car le Quarré de la Racine de $\sqrt{-3}$, eſt -3.

$$xx - 4x + 4 + 3 = xx - 4x + 7 = 0.$$

Or nous venons de voir que cette concluſion renferme une impoſſibilité : la ſuppoſition d'où elle eſt une ſuite, eſt donc elle-même contradictoire. Il n'eſt donc pas poſſible que x ait ces Valeurs ; car ſi cela étoit, on auroit $xx - 4x = 7$.

On peut ſuppoſer $x = 2 + \sqrt{3}$, & $x = 2 - \sqrt{3}$, ce qui donneroit $xx - 4x = -1$; ce qui eſt vrai, comme nous venons de le voir.

Souſtraction. 7. En raiſonnant & en calculant toûjours par ſuppoſition, on ſouſtraira la $\sqrt{x - 12}$ de la $\sqrt{x - 147}$, ou $2\sqrt{-3}$ de $7\sqrt{-3}$, & on aura pour Reſidu $5\sqrt{-3} = -75$.

Tout cela devroit avoir lieu, ſi ces Racines étoient réelles ou poſſibles.

Pour preparer à l'Addition, j'ai déja donné un exemple de Multiplication.

Reflexion ſur la Multiplication. 8. Ces Multiplications aboutiſſent quelquefois à des Produits ſurprenans. Si j'ai $2\sqrt{-4}$, en multiplant par 3, j'aurai le triple. Par conſequent $6\sqrt{-4}$.

Digitized by Google

$\sqrt{-4} \times \sqrt{-4}$ donne pour Produit -4; car une Racine multipliée par elle-même, donne pour produit son Quarré.

Si -4 est un Quarré, $\sqrt{-4}$ est sa Racine; & multipliée par elle-même, donne son Quarré -4.

$1\sqrt{-4} \times 1\sqrt{-4}$, donne donc -4, ou 1×-4.

$1\sqrt{-4} \times 2\sqrt{-4}$ donnera le double; par consequent $2 \times -4 = -8$

Par la même raison $1\sqrt{-4} \times 4\sqrt{-4}$, donnera $4 \times -4 = -16$.

Donc $1\sqrt{-4} \times -1\sqrt{-4}$ donnera $-1 \times -4 = 4$.

Et $1\sqrt{-4} \times -3\sqrt{-4}$, donnera $-3 \times -4 = 12$.

Et par consequent $1\sqrt{-4} \times -4\sqrt{-4}$, donnera $-4 \times -4 = 16$; c'est-à-dire, que la Multiplication de ces Racines Imaginaires & impossibles, donnera pour Produit un veritable Quarré. Mais cela ne signifie autre chose, si ce n'est que tel seroit le resultat, au cas que ces Multiplications fussent possibles par la possibilité des Racines multipliées.

Si l'on pouvoit donner à x deux valeurs, dont l'une fût $3 + 1\sqrt{-4}$, & l'autre $3 - 1\sqrt{-4}$, on auroit $xx - 6x + 9 - 1 \times -4 =$

$$= xx - 6x + 13 = 0.$$

Donc $xx - 6x = -13$. Par consequent $xx - 6x + 9 = 9 - 13 = -4$;

& $x - 3 = \sqrt{-4}$, & $x = 3 \pm \sqrt{-4}$.

On reviendroit à ce qu'on avoit supposé, le principe seroit vrai si la conclusion l'étoit; & si le principe n'étoit pas faux, la conclusion aussi ne seroit pas fausse.

Digitized by Google

Diviſion & Remarque.

9. Comme la Racine de 4 ſe trouve une fois dans la Racine de 4, ainſi la Racine de -4 ſe trouveroit une fois dans la Racine de -4. Dans $3\sqrt{-4}$, elle ſe trouveroit trois fois, & $3\sqrt{-4}$ ſe trouveroit deux fois dans $6\sqrt{-4}$; de ſorte que le Quotient de $6\sqrt{-4}$ diviſé par $3\sqrt{-4}$, eſt 2.

Par conſequent le Quotient de $\sqrt{-144}$ diviſé par $\sqrt{-36}$, eſt auſſi 2, car $\sqrt{-144} = 6\sqrt{-4}$, & $\sqrt{-36} = 3\sqrt{-4}$.

Or $2 = \sqrt{4}$. Donc $\frac{\sqrt{-144}}{\sqrt{-36}} = \sqrt{4}$. Le Quotient de la Diviſion de ces deux Racines Imaginaires & impoſſibles, eſt une Racine effective d'un vrai Quarré. Si cela vous paroît incroïable, j'y conſens : concluez que cela peut être, j'y conſens encore : concluez enfin que ces Racines Imaginaires ne ſont point & ne ſe peuvent diviſer ; de tout cela, j'en tomberai d'accord. C'eſt aſſez qu'on reconnoiſſe que ſi elles étoient poſſibles, il faudroit ainſi les diviſer. On a vû dans la Diviſion, que $-$ diviſé par $-$, donne un Quotient ſous le Signe $+$.

$\sqrt{-12}$ diviſée par $\sqrt{-6}$, donnera pour Quotient $\sqrt{2}$, car $\sqrt{2} \times \sqrt{-6}$, donne $\sqrt{-12}$.

$\frac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-8}} = \sqrt{3}$, & $\frac{\sqrt{-24}}{-\sqrt{-8}} = -\sqrt{3}$,

car $-1\sqrt{-8} \times -1\sqrt{3} = +1\sqrt{-24}$.

Exemple en Lettres.

10. $\frac{a\sqrt{c^2}}{b\sqrt{c^2}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, & $\frac{a\sqrt{-c^2}}{b\sqrt{-c^2}} = \frac{a}{b}$.

$\frac{-b^2}{\sqrt{-b^2}} = \frac{\sqrt{-b^2} \times \sqrt{-b^2}}{\sqrt{-b^2}} = \sqrt{-b^2}$.

$\frac{\sqrt{-b^2} \times \sqrt{-b^2}}{a\sqrt{-b^2}} = \frac{-b^2}{a\sqrt{-b^2}} = \frac{1}{a} \times \frac{-b^2}{\sqrt{-b^2}} = \frac{1}{a} \times \frac{\sqrt{-b^2}}{1}$.

Digitized by Google

Si j'avois à diviſer $a\sqrt{}-b^2$, par $\sqrt{}-b^2$, j'aurois pour Quotient a, & $\frac{a\sqrt{}-b^2}{-b^2}=\frac{a}{\sqrt{}-b^2}$

11. Je montrerai encore par quelques Exemples, comment on vient à des Imaginaires, après avoir fait quelques ſuppoſitions dont on ne prévoïoit pas l'erreur. Application de la Theorie des Imaginaires.

J'ai deux Quantitez x & y, & je ſçai, 1°. Que $x-y=4$. 2°. Que $xx-yy=32$; c'eſt-à-dire, que je connois leur difference & la difference de leurs Quarrez. Je veux les connoître.

1°. $x-y=4$. Donc $x=4+y$.

2°. $xx-yy=32$. D. $xx=32+yy$.

D. $x=\sqrt{32+yy}$. Or $x=y+4$.

D. $y+4=\sqrt{32+yy}$. D. $yy+8y+16=32+yy$.

D. $8y+16=32$. D. $8y=16$. D. $y=\frac{16}{8}=2$.

D. $x=4+y=6$, & $xx-yy=36-4=32$.

Si j'avois ſuppoſé $x-y=12$, & $xx-yy=96$, j'aurois trouvé $yy+24y+144=96+yy$, & $24y=-48$, & $y=\frac{-48}{24}=-2$. Donc $x=12+y=12+-2=10$. $xx-yy=100-4=96$.

Mais ſi j'avois ſuppoſé $x+y=6$, & $xx+yy=20$, j'aurois $x=6-y$. $xx=20-yy$.

Donc $6-y=x=\sqrt{20-yy}$. D. $36-12y+yy=20-yy$. Donc $2yy=12y-16$, & $yy=6y-16$. D. $yy-6y=-16$. D. $yy-6y+9=9-16=-7$, & $y=3\pm\sqrt{-7}$.

En effet, $yy-6y+7=0$, répond à $yy-cy+b=0$, & celle-ci à $gg-gg+gP=0$, quand $c=g+P$. $-gP$

Digitized by Google

Mais quand je conclus $xx - cx + \frac{cc}{4} = \frac{cc}{4} - b$,

c'eſt comme ſi je diſois $\begin{cases} gg - gg + \frac{gg}{4} = + \frac{gg}{4} - gp \\ -gp + \frac{pp}{4} + \frac{pp}{4} \end{cases}$

Or afin que $\frac{gg+pp}{4} > gp$, il faut que $gg + pp < 4gp$. Mais ſi au contraire $gg + pp < 4gp$, comme $gg > gp$, il faudra que $pp > 3gp$; & pour cet effet, il faudroit que g fût plus petit que p.

Toutes les fois donc que dans une telle Equation le quart du Quarré du Coëfficient ne ſurpaſſera pas le 3e Terme, il y aura Racine Imaginaire & impoſſibilité.

Seconde Application. 12. Si quelqu'un s'aviſoit de ſuppoſer $x^3 + b^3 = 0$, en ſuppoſant x Négative pour avoir $x^3 = -b^3$. Donc $x = -b$. Donc $x + b = 0$.

Or $\frac{x^3 + b^3 = 0}{x + b = 0} = xx - bx + bb = 0$.

Donc $xx - bx = -bb$. D. $x - b = \sqrt{\frac{bb}{4} - bb}$.

Donc $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{-3bb}{4}}$.

Troiſiéme Application. 13. Si j'avois le Binome $\overline{6 + \sqrt{48}}$, pour en extraire la Racine, 1°. Je prendrois 3, moitié de 6, 2°. Je le quarrerois, de 9 j'ôterois le quart du faux Quarré 48, & il me reſteroit -3. Donc $\sqrt{-3}$ ſeroit la difference des Quarrez, & j'aurois $\overline{\sqrt{3} + \sqrt{-3}}$ pour la Grande Racine, & $\overline{\sqrt{3} - \sqrt{-3}}$ pour la Petite.

La Somme de ces deux Racines multipliée par elle-même, donneroit, 1°. $3 + \sqrt{-3} = aa$. 2°. $3 - \sqrt{-3} = bb$, & $6 = aa + bb$.

Digitized by Google

3°. deux fois $\sqrt{3+\sqrt{-3}} \times \sqrt{3-\sqrt{-3}} = 2ab = 2\sqrt{9+3} = 2\sqrt{12} = \sqrt{48}$.

Cela ſignifie que ſi cette Méthode pouvoit avoir lieu dans un agencement de Termes, $\sqrt{-3}$ ſeroit réelle, & me donneroit ce que cherche.

Mais comme elle ne l'eſt pas; pour avoir la vraie Racine, 1°. Je prens la moitié de $\sqrt{48} = \frac{1}{2}\sqrt{48} = \sqrt{\frac{48}{4}} = \sqrt{12}$. 2°. Je quarre cette moitié, & j'ai 12. 3°. J'ôte de 12 le quart du faux Quarré 6, & j'ai $12 = \frac{48}{4} - \frac{6}{4} = \frac{42}{4} = \frac{21}{2}$.

Donc la Racine de $\sqrt{12+\sqrt{\frac{21}{2}}}$ eſt la Grande Racine du Quarré $\sqrt{48+6}$, & la Racine de $\sqrt{12-\sqrt{\frac{21}{2}}}$ eſt la Petite.

La Somme de ces deux Racines multipliée par elle-même, donne $\sqrt{12+\sqrt{\frac{21}{2}}} = aa$, & $\sqrt{12-\sqrt{\frac{21}{2}}} = bb$, & $2\sqrt{12} = \sqrt{48} = aa+bb$, & deux fois $\sqrt{12+\sqrt{\frac{21}{2}}} \times \sqrt{12-\sqrt{\frac{21}{2}}} = 12 - \frac{21}{2} = 3$, dont le double eſt 6. On a donc le Quarré $6+\sqrt{48}$, dont on a trouvé une Racine réelle.

Quand j'opere ſur des Entiers, & que j'ai, par exemple, $32+4$. 1°. Je quarre 16. 2°. 256, j'ôte la moitié du ſecond Terme, & j'ai $\sqrt{16+\sqrt{252}} + \sqrt{16-\sqrt{252}}$ pour $\sqrt{32+4}$.

En multipliant, j'ai 1°. $16+\sqrt{252}$, & $16-\sqrt{252} = 32$. 2°. deux fois $\sqrt{16+\sqrt{252}} \times \sqrt{16-\sqrt{252}}$ égal au double de $256-252$.

Digitized by Google

Mais ſi j'avois pris la moitié de 4, j'aurois eu pour Grande Racine $\sqrt{2} + \sqrt{2 \times 2 - \frac{16}{2}}$, ou $2 + \sqrt{4 - 8}$, ou $\sqrt{2} + \sqrt{-4}$, & pour Petite $\sqrt{2} - \sqrt{-4}$.

Donc $aa + bb = 4$, & $2ab$ égal deux fois $\sqrt{2 + \sqrt{-4}} \times \sqrt{2 - \sqrt{-4}}$, ce qui m'auroit viſiblement amené à contradiction; car le Produit auroit été $2 + 4 = 6$, dont le double eſt 12. Ce qui ne donne point le Quarré $32 + 4$.

CHAPITRE XXIV.

Des Equations du quatriéme Degré.

Avertiſſement.

1. PLus les Calculs ſont compoſez, plus il eſt neceſſaire de ne ſe borner point à les lire. Il faut avoir ſans ceſſe la plume à la main, & executer ſoi-même ce qu'on lit. On doit même réiterer les Operations, & ſe rendre très-familiere une partie du Calcul avant que de paſſer à une ſuivante. Il ſemble d'abord que ces précautions retardent; mais, dans le fond elles abregent, & il n'y a qu'à les négliger pour ſe trouver bientôt convaincu qu'on a perdu ſon temps, & pour ſe trouver dans la neceſſité de recommencer.

Premier Cas. Si j'ai 1°. $x = f$, & $x = f$,

j'aurai $x - f = 0$

$x - f = 0$

Donc $xx - 2fx + ff = 0$

Si j'ai 2°. $x = -f$, & $x = -f$,

j'aurai $x + f = 0$

$x + f = 0$

Donc $xx + 2fx + ff = 0$

Digitized by Google

Si je multiplie ces deux Quarrez,

j'aurai $xx + 2fx + ff = 0$

$xx - 2fx + ff = 0$

$x^4 + 2fx^3 + ffxx - 2f^3x + f^4 = 0$

$-2fx^3 - 4ffxx + 2f^3x$

$+ ffxx$

$x^4 \quad -2ffxx \quad +f^4 = 0$

Donc, quand les quatre *Racines* ſont égales, & qu'il y en a deux de *Poſitives* & deux de *Négatives*, il n'y a ni ſecond ni quatriéme Terme. Le 3e eſt ſous le Signe —, & le 5e ſous le Signe +.

Quand donc on a $x^4 - pxx + q = 0$, il faut eſſaïer de faire $p = 2ff$, $q = f^4$, d'où l'on conclura $ff = \frac{p}{2}$, & $f^4 = \frac{pp}{4}$.

Si donc $q = \frac{pp}{4}$, il faut conclure que les quatre Racines ſont égales, & qu'il y en a deux de *Poſitives*, & deux de *Négatives*, & $x = \sqrt[2]{\frac{p}{2}} = \sqrt[4]{q}$.

On peut même faire $x^4 = yy$, & $xx = y$. Alors on aura $yy - py + q = 0$. Ce qui ſera une Equation du ſecond Degré.

2. Soit $x^4 - 18xx + 81 = 0$, j'ai $81 = \frac{18 \times 18}{4}$ Exemple.

$= \frac{18}{2} \times \frac{18}{2} = 9 \times 9$.

Donc $xx = \frac{18}{2}$, & $x = 3$.

3. Si j'ai $\left\{\begin{matrix} x=b \\ x=b \\ x=b \end{matrix}\right\}$ j'aurai $x-b=0$, & $\overline{x-b}^3 = 0$, Second Cas.

$x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 = 0$.

Digitized by Google

Si après cela je prens pour 4e Racine $x = -3b$, j'aurai $x + 3b = 0$; & en multipliant le Cube par cette Racine, j'aurai $x^4 - 6bbxx + 8b^3x - 3b^4$.

Quand donc j'ai $x^4 - pxx + mx - q = 0$; si je suppose $p = 6bb$, $m = 8b^3$, $q = 3b^4$, je conclurai, donc $bb = \frac{p}{6}$.

Donc $b^4 = \frac{pp}{36}$, & $\frac{3pp}{36} = 3b^4 = q$, & $\frac{pp}{36} = \frac{q}{3}$.

Je conclurai encore $8b^3 = m$. Donc $b^3 = \frac{m}{8}$.

$-3b^4 = -q$. Donc $b^4 = \frac{q}{3}$.

Si donc $\frac{pp}{36} = \frac{q}{3}$, ou $\frac{pp}{12} = q$, je conclurai qu'il y a trois Racines égales *Positives* & une *Négative*, qui vaut autant que ces trois.

Une des trois x sera $b = \sqrt{bb} = \sqrt{\frac{p}{6}}$, car $\frac{p}{6} = bb$.

La Grande Racine $3\sqrt{\frac{p}{6}}$, ou puisque $q = 3b^4$, & $b^4 = \frac{q}{3}$, la Grande Racine sera $3\sqrt[4]{b^4} = 3\sqrt[4]{\frac{q}{3}}$.

Troisiéme Cas. 4. Si l'on avoit eu $\left\{\begin{matrix} x+b=0 \\ x+b=0 \\ x+b=0 \end{matrix}\right\}$ & $3x - 3b = 0$.

Après les Multiplications on auroit trouvé $x^4 - 6bbxx - 8b^3x - 3b^4$.

On seroit parvenu aux mêmes Valeurs ; seulement ce qu'on vient de trouver *Positif* auroit été *Négatif*, & reciproquement cela a lieu quand tout ce qui suit x^3 est sous le Signe $-$.

Digitized by Google

5. Si on a $\left\{\begin{matrix} x-b=0 \\ x-b=0 \end{matrix}\right\}$ on aura $xx-2bx+bb=0$. Quatriéme Cas.

Si après $\left\{\begin{matrix} x+b+c=0 \\ x+b-c=0 \end{matrix}\right\}$ cela on a On a 2 Rac. inégales, dont la Somme eſt $2b$.

on aura $xx+bx-cx+bb-bc-cc$
$+bx+cx \quad +bc$

$xx+2bx \quad +bb \quad -cc$

Comme les deux x des premieres Equations étoient *Poſitives*, les deux x ſuivante doivent être Négatives.

Pour cet effet il eſt neceſſaire, 1°. que $x=-b+c$, 2°. que $b>c$, ſans quoi $c-b$ ſeroit Poſitif, & par conſequent $x=c-b$.

$xx-2bx+bb \times xx+2bx+bb=x^4-2bbxx+2bccx+b^4$
$-cc \quad -ccxx \quad -bbcc$

Si donc on a $x^4-pxx+mx-q=0$.

On ſuppoſe, 1°. $p=2bb+cc$. 2°. $2bcc=m$. 3°. $b^4-bbcc=q$.

De là on conclura que $cc=p-2bb$. Donc $bb \times cc=pbb-2b^4$; & $b^4-bbcc=q$, $=b^4-pbb+2b^4=3b^4-pbb=q$. Donc $b^4-\frac{pbb}{3}=\frac{q}{3}$.

Voila une Equation du ſecond Degré.

Donc $b^4-\frac{p}{3}bb+\frac{pp}{36}=\frac{q}{3}+\frac{pp}{36}$. Donc $bb=\frac{p}{6}\pm\sqrt{\frac{q}{3}+\frac{pp}{36}}$.

Donc $b=\sqrt{\frac{p}{6}\pm\sqrt{\frac{q}{3}+\frac{pp}{36}}}$.

Cela étant, puiſqu'on avoit eu $x-b=0$ & $x=b$, on aura $x=\sqrt{\frac{p}{6}\pm\sqrt{\frac{q}{3}+\frac{pp}{36}}}$; ce qui eſt tout compoſé de Connuës.

Digitized by Google

Dès qu'on a connu b, on connoît $cc = p - 2bb$, & égal encore à $\frac{m}{2b}$, on a donc $x = c - b$, & $x = -b - c$ Connuës.

6. $x^4 - 33xx + 8x + 240 = 0$.

1°. $\frac{pp}{36} = \frac{1089}{36}$. 2°. $\frac{q}{3} = \frac{240}{3} = 80 = \frac{2880}{36}$. Donc $\sqrt{\frac{q}{3} + \frac{pp}{36}} = \sqrt{\frac{3969}{36}} = \frac{63}{6}$.

Ajoûtez-y $\frac{33}{6} = \frac{p}{6}$, vous aurez $\frac{96}{6} = 16$.

Donc $x = \sqrt{16} = 4$, $b = 4$ & $p - 2bb = \frac{m}{2b} = 33 - 32 = \frac{8}{8} = 1 = cc$. Donc $x = -b - c = -4 - 1 = -5$, & $x = -b + c = -3$.

Cinquiéme Cas.

7. Si j'avois eu $\begin{cases} x = -b \\ x = -b \end{cases}$

Par conſequent $\begin{cases} x + b = 0 \\ x + b = 0 \end{cases}$

$xx + 2bx + bb = 0$

Enſuite, pour Racines Poſitives $\begin{cases} x = b - c \\ x = b + c \end{cases}$ où b ſera encore $> c$

$x - b + c = 0$ x $x - b - c = 0$ donne

$xx - 2bx + bb = 0$
$\quad - cc$

& en multipliant par là, $xx + 2bx + bb$ on aura $x^4 - 2bbxx - 2bccx + b^4$
$\quad - ccxx \qquad\qquad - bbcc$

De là on tirera les mêmes Valeurs pour p, pour m, & pour q.

Seulement parce que le 3e Terme eſt ſous le Signe —, on conclura que les deux x égales ſont Négatives.

Digitized by Google

8 Si, après avoir fait $xx - 2bx + bb = 0$, ou $xx + 2bx + bb = 0$, on prend pour les deux autres Racines (dont la Somme doit égaler deux b) l'une *Positive*, & l'autre *Négative*; en ce cas, il faudra que $b < c$, afin que $x = -b + c$ soit Positive; car, pour ce qui est de l'autre $x = -b - c$, elle est Négative. Sixiéme Cas.

En ce cas encore, on aura les mêmes expressions, & on parviendra aux mêmes Valeurs de p, m, q.

Seulement puisque $b < c$, & par consequent $bb \times bb < bb \times cc$, $b^4 - bbcc$ sera Négative, & q qui lui répond sera sous le Signe —.

9. Soit $x^4 - 99xx - 490x - 600 = 0$. Exemple.

1°. $\frac{pp}{36} = \frac{9801}{36}$. 2°. $\frac{q}{3} = 200 = \frac{7200}{36}$.

Donc $\sqrt{-\frac{q}{3} + \frac{pp}{36}} = \sqrt{\frac{9801 - 7200}{36}} = \sqrt{\frac{2601}{36}} = \frac{51}{6}$. Ajoûtez-y $\frac{99}{6}$, vous aurez $\frac{150}{6} = 25 = bb = xx$ & $x = 5$. Les deux Racines égales sont donc $x = 5$, ou $x = -5$. J'ai $x = -5$, puisque $490x$ est sous le Signe —. On a donc $b = 5$.

On a $cc = \frac{m}{2b} = \frac{490}{10} = 49$. Donc $c = 7$; & l'une des Racines inégales est $-7 - 5 = -12$; l'autre $7 - 5 = 2$. Leur Somme $+2 - 12 = -10 = -2b$.

(Puisque $x = -5$, $-490 \times x = -490 \times -5 = +2450$, on a donc $25 \times 25 + 2450 = 99 \times 25 + 600$.

Si $x = 2$, on aura $16 = x^4. - 396 = 99xx. + 980 = 490x. - 600 = 0$.

Si $x = -12$, on aura $+20736 = x^4. - 14256 = 99xx. - 5880 = 490x. - 600 = 0$.

Digitized by Google

Car quand $x = b - c$, on fait $x + b + c = 0$. Par conſequent dans l'Equation on aura les Coefficiens b & c ſous le Signe $+$; ce qui, avec x Négative, fera un Terme Négatif.

Comment on fait évanoüir le ſecond Terme.

10. Si je fais $y = x + b$, j'aurai $yy = xx + 2bx + bb$, & $y^3 = x^3 + 3xxb + 3bbx + b^3$, & $y^4 = x^4 + 4bx^3 + 6bbxx + 4b^3x + b^4$, & $y^3 \times -4b = -4by^3 = -4bx^3 - 12xxbb - 12b^3x - 4b^4$.

Donc $y^4 - 4by^3 = x^4 - 6bbxx - 8b^3x - 3b^4$; où le ſecond Terme eſt évanoüi.

Si on multiplie yy par $+4bb$, on aura $+4bbyy = +4bbxx + 8b^3x + 4b^4$.

Donc $y^4 - 4by^3 + 4bbyy = x^4 - 2bbxx + b^4$, & $ccyy = -ccxx - 2bccx - bbcc$.

Donc $y^4 - 4by^3 + 4bbyy = x^4 - 2bbxx - 2bccx + b^4$
$- ccyy \quad - ccxx \quad - bbcc$

Or $x^4 - 2bbxx - 2bccx + b^4 = 0$,
$- ccxx \quad - bbcc$

comme provenant de $x + b - c = 0$
multiplié par $x + b + c = 0$
& multiplié encore par $xx - 2bx + bb = 0$.

11. Donc ſi j'ai $y^4 - 4by^3 + 4bbyy - b^3y + 2b^4 = 0$
$- ccyy$

Après avoir fait $y = x + b$ (c'eſt-à-dire, $+$ le Coëfficient du ſecond Terme diviſé par 4) j'aurai une Equation $= 0$, qui ſera :

$x^4 - 2bbxx - 2bccx + b^4 - b^3x - b^4 + 2b^4 = 0$
$- ccxx \quad - bbcc$

Et comme $x^4 - 2bbxx - 2bccx + b^4 = 0$,
$- ccxx \quad - bbcc$

je concluray que le Reſte $- b^3x - b^4 + 2b^4 = 0$.

Donc $- b^3x + b^4 = 0$. Donc $b^4 = b^3x$.

Donc $\frac{b^4}{b^3} = \frac{b^3x}{b^3}$. Donc $b = x$.

Digitized by Google

12. Quand donc j'ai une Equation du 4e Degré $y^4 \pm ny^3$, &c. 1°. j'en fais évanoüir le ſecond Terme, en faiſant $y = x \pm \frac{n}{4}$; & en ſubſtituant à y & ſes Puiſſances, $x \pm \frac{n}{4}$ & ſes Puiſſances, multipliant toûjours $x \pm \frac{n}{4}$ & ſes Puiſſances par les Coëfficiens de y & de ſes Puiſſances. J'ai $x^4 - cx^3 + mxx - nx + b = 0$. Regle generale.

Pour faire évanoüir le ſecond Terme cx^3 ſans rien changer dans la valeur de l'Equation, d'abord je fais $x = y + \frac{c}{4}$. De là je conclus que,

1°. $-nx = -ny - \frac{nc}{4}$.

2°. $xx = yy + \frac{2cy}{4} + \frac{cc}{16}$. Donc $mxx = myy + \frac{mcy}{2} + \frac{mcc}{16}$.

3°. $x^3 = y^3 + \frac{3cyy}{4} + \frac{3ccy}{16} + \frac{c^3}{64}$,

& $-cx^3 = -cy^3 - \frac{3ccyy}{4} - \frac{3c^3y}{16} - \frac{c^4}{64}$,

& $x^4 = y^4 + cy^3 + \frac{6ccyy}{16} - \frac{2c^3y}{32} + \frac{c^4}{256}$,

$-cx^3 = -cy^3 - \frac{12ccyy}{16} - \frac{3c^3y}{16} - \frac{c^4}{64}$

$+mxx = +myy + \frac{mcy}{2} + \frac{mcc}{16}$.

Donc $y^4 * \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3ccyy}{8} - \frac{5c^3y}{16} + \frac{mcc}{16} \\ -myy + mcy - \frac{nc}{4} \\ -ny - \frac{3c^4}{256} \\ +b \end{array} \right\} = 0$

Digitized by Google

Soit $-\frac{3cc}{8}-m=-p.\ -\frac{5c^3}{16}-n+mc=\pm q.$ $+\frac{mcc}{16}+b-\frac{nc}{4}-\frac{3c^4}{256}=\pm g.$ Tout cela eſt connu.

On aura donc $y^4-pyy\pm qy\pm g=0.$ Le ſecond Terme eſt évanoüi & l'Equation ordonnée, pour en faciliter la ſolution.

Conſequences & Recapitulation.

13. 1°. Quand j'ai ainſi une Equation du 4e Degré ſans ſecond Terme où l'Inconnuë ſoit élevée à la 3e Puiſſance, je conſidere que dans une telle Equation, les quatre Racines peuvent ſe partager en deux Sommes égales, mais deſquelles l'une ſera Poſitive & l'autre Négative.

2°. Cela forme divers cas. 1°. Les quatre Racines peuvent être égales. 2°. Il peut y en avoir trois d'égales, & ſi celles-ci ſont Poſitives, la 4e égale à leur Somme, ſera Négative; au lieu que ſi 3°. elles ſont Négatives, la 4e ſera Poſitive. 4°. Deux peuvent être égales, & la 3e & la 4e inégales, mais formant une Somme égale à la Somme des deux premieres, & ſi ces deux premieres ſont Poſitives, la Somme des deux dernieres ſera Négative. Mais 5°. ſi les deux premieres ſont Négatives, la Somme des deux autres ſera Poſitive. Enfin, elles peuvent être toutes inégales, mais en ſorte que les deux Poſitives d'un côté & les deux Négatives d'un autre, ou les trois Poſitives & la 4e Négative, ou les trois Négatives & la 4e Poſitive, forment des Sommes égales.

Exemple de Racines inégales.

14. Si je multiplie $x-2=0$ par $x-5=0$, j'aurai $xx-7x+10=0.$

Les deux Racines ſont $x=2.\ x=5$, dont la Somme eſt $+7.$

Si je fais $x=-3,\ x=-4$, j'aurai $2x=-7$,

Digitized by Google

$x + 3 \times x + 4$, donne $xx + 7x + 12 = 0$.

En multipliant ces deux Equations l'une par l'autre, j'aurai pour Produit $x^4 + 27xx - 14x + 120 = 0$, Equation de la 4e Puiſſance, ſans ſecond Terme.

J'aurai

x^4	$-27xx.$	$14x.$	120	
16	108	28	120	
625	675	70	120	

Dans ces deux Applications $x = 2$, $x = 5$ eſt Poſitive, & $-14x = -14 \times +x$ eſt Négatif.

$xx \times 27$ eſt un Produit de ſa nature Négatif; car xx eſt Poſitif, & 27 eſt le Produit de $+9 = -3 \times -3$, mutiplié par la Racine 3, qui eſt Négative, puiſque $x = -3$. Donc 9×-3 eſt Négatif, & $27xx$, Négatif de ſa nature, garde cette qualité ſous le Signe $+$.

J'ai donc $16 + 120 = 108 + 28$, & $625 + 120 = 675 + 70$.

Après cela j'ai

x^4	$27xx$	$14x$	120	
81	243	42	120	
256	432	56	120	

$x = -3$. $x = -4$ eſt Négative de ſa nature: donc multipliée par -14, elle forme les Produits Poſitifs 42 & 56.

On a donc $243 = 81 + 42 + 120$, & $432 = 256 + 56 + 120$.

15. En general, ſoit $x = b + c$, & $b > c$, on aura $x = b - c$. Expreſſion generale.

$x - b - c = 0$, & $xx - 2bx + bb - cc = 0$

$x - b + c = 0$

La Somme des Racines eſt $+2b$.

Qu'on faſſe $x = -b - d$ / $x = -b + d$ } La Somme ſera encore $2b$.

$x + b + d = 0 \times x + b - d = 0$, donne $xx + 2bx + bb - dd = 0$, & l'Equation du 4e Degré ſera :

Digitized by Google

$x^4 - 2bbxx + 2bddx + b^4 = 0 = x^4 - pxx \pm mx \pm q$
$- cc \quad - 2bcc \quad - ccbb$
$- dd \quad - ddbb$
$+ ccdd$

Incommensurables.

16. Ce cas, comme on voit, eſt plus difficile à reſoudre que les precedens. Dans ceux-là & dans celui-ci, la difficulté croîtra, ſi l'Equation eſt en partie compoſée de Racines Incommenſurables.

Par exemple, ſi j'ai $x - \sqrt{2} = 0$ & $x + \sqrt{2} = 0$,
$x - \sqrt{2} = 0 \quad x + \sqrt{2} = 0$

Après les Multiplications j'aurai $x^4 - 4xx + 4 = 0$

C'eſt une Equation du ſecond Degré, qui a pour Racine $xx - 2 = 0$. Donc $xx = 2$, & $x = \sqrt{2}$.

Si je fais $x + \sqrt{3} = 0 \quad x - \sqrt{3} = 0$
$x + \sqrt{4} = 0 \quad x - \sqrt{4} = 0$

Après les Multiplications, j'aurai $x^4 - 7xx + 12 = 0$.

Donc $x^4 - 7xx = -12$. Donc $x^4 - 7xx + \frac{49}{4} = \frac{49}{4} - \frac{48}{4} = \frac{1}{4}$. Donc $xx - \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, & $xx = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} = 4 = 3$. Donc $x = \sqrt{4}$ & $= \sqrt{3}$.

Si je fais, 1°. $x + \sqrt{2} = 0$. 2°. $x + 2\sqrt{2} = \sqrt{8} = 0$, en multipliant, j'aurai pour Produit $xx + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$.

Si je multiplie cette Equation par :
$x + \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 0$, j'aurai :
$x^3 + 6xx\sqrt{2} + 22x + 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2} = 0$.

Enfin, pour avoir la 4ᵉ Puiſſance, je multiplierai par $x - \sqrt{72} = x - 6\sqrt{2}$

$x^4 \quad -50xx \quad -120x\sqrt{2} - 144.$

Si

Si je fais entrer des Incommenſurables dans les autres cas, ils deviendront encore plus difficiles à reſoudre.

17. Voici une Méthode des plus univerſelles. Seconde Méthode.

Le dernier Terme qui eſt connu, eſt toûjours un Produit des quatre Quantitez qu'on a égalées à x.

En faiſant $x \pm b = 0$, $x \pm c = 0$, $x \pm d = 0$, $x \pm f = 0$, on aura pour 4e Terme $\pm bcdf$.

Si donc on prend $x \pm b$ pour Diviſeur de l'Equation, & que la Diviſion ſe faſſe ſans reſte, le Quotient donnera une 3e Puiſſance qui contiendra les autres trois Racines, & dont le dernier Terme ſera cdf.

$x \pm c$ diviſant cette Equation, donnera pour Quotient une Equation du ſecond Degré.

18. J'ai $x^4 - 55xx - 210x - 216 = 0$. Exemple.

Je diviſe cette Equation par $x - 9$, & j'ai pour Quotient $x^3 + 9xx + 26x + 24$.

Celle-ci je la diviſe par $x + 4$, & j'ai pour Quotient $xx + 5x + 6 = 0$. Equation du ſecond Degré, qui, diviſée par $x + 2$, donne pour Quotient $x + 3$. J'ai donc $x = -2$. $x = -4$, & $x = 9$.

19. Dans l'Equation $x^4 - 50xx - 120x\sqrt{2} - 144 = 0$. Second Exemple.

Puiſque l'Incommenſurable $\sqrt{2}$ eſt reſté, je conclus que cette $\sqrt{2}$ étoit une des Valeurs de x, & je diviſe par $x + \sqrt{2}$.

Ce qui me donne pour Quotient $x^3 - xx\sqrt{2} - 48x - 72\sqrt{2}$.

Entre les Diviſeurs de $72\sqrt{2}$, je prens $2\sqrt{2}$ pour diviſer l'Equation du 3e Degré par $x + 2\sqrt{2}$, & j'ai pour Quotient $xx - 3x\sqrt{2} - 36$.

Je la diviſe par $x + 3\sqrt{2}$, parce que cet Incommenſurable eſt reſté, & que $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, & que 18 eſt Diviſeur de 36.

Digitized by Google

J'ai pour Quotient $x - 6\sqrt{2}$, qui multipliant $x + 3\sqrt{2}$, donne

$$xx - 6x\sqrt{2} - 18\sqrt{4} = xx - 3x\sqrt{2} - 18 \times 2 = xx - 3x\sqrt{2} - 36.$$
$$+ 3x\sqrt{2}$$

Racines Imaginaires.

2°. Si, après avoir eu $\begin{cases} x + b = 0 \\ x + b = 0 \end{cases}$

& dès-là $xx + 2xb + bb = 0$

On avoit $x = b + \sqrt{-cc}$, & $x = b - \sqrt{-cc}$; ce qui feroit $2x = 2b$, comme auparavant on avoit $2x = -2b$.

$$\begin{array}{l} x - b - \sqrt{-cc} = 0 \\ x - b + \sqrt{-cc} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xx - bx - x\sqrt{-cc} + bb - b\sqrt{+c^4} = -1 \times cc \\ \quad - bx + b\sqrt{-cc} \\ \quad\quad + x\sqrt{-cc} \\ \quad\quad - b\sqrt{-cc} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xx - 2bx + bb \\ \quad\quad - cc \\ xx + 2bx + bb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^4 - 2bx^3 + bbxx + 2b^3x + b^4 \\ \quad + 2bx^3 - 4bbxx - 2b^3x - bbcc \\ \quad\quad - ccxx - 2bccx \\ \quad\quad + bbxx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^4 - 2bbxx - 2bccx + b^4 \\ \quad - ccxx - bbcc \end{array}$$

Si j'avois fait $x - b = 0$, pour avoir $xx - 2bx + bb = 0$, & enſuite $x + b - \sqrt{-cc} = 0$, & $x + b + \sqrt{-cc} = 0$, pour avoir $xx + 2bx + bb = 0$. En multipliant, j'aurois eu :

$$\begin{array}{l} -cc \\ x^4 - 2bbxx + 2bccx + b^4 = 0. \\ \quad - ccxx - bbcc \end{array}$$

Ce qui répond à $x^4 - pxx \pm mx \pm q = 0$.

D'où je conclus que, 1°. $2bb + cc = p$. 2°. $2bcc = m$. 3°. $b^4 - bbcc = \pm q$.

Donc $cc = p - 2bb$.

Digitized by Google

Donc $q = b^4 - bbcc = b^4 - bbxp - 2bb = b^4 - pbb + 2b^4 = 3b^4 - pbb$.

Donc $b^4 - \frac{p}{3}bb + \frac{pp}{36} = \pm\frac{q}{3} + \frac{pp}{36}$.

Donc $bb = \frac{p}{6} \pm \sqrt{\pm\frac{q}{3} + \frac{pp}{36}}$.

Donc $b = \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\pm\frac{q}{3} + \frac{pp}{36}}}$.

21. Si j'avois $x^4 - 20xx - 12x + 63 = 0$, j'aurois $b = \sqrt{\frac{10}{3} + \sqrt{21 + \frac{100}{9}}}$, ce qui ne me donne que des Incommenſurables. Exemple.

Je diviſe par $x + 3$, & j'ai pour Quotient $x^3 - 3xx - 11x + 21$.

En le diviſant encore par $x + 3$, j'aurai pour Quotient $xx - 6x + 7$.

Dès-là j'ai $xx - 6x = -7$, & $xx - 6x + 9 = 9 - 7 = 2$, & $x - 3 = \sqrt{2}$.

22. Quand j'ai $x^4 - 2bbxx + 2bddx + b^4 - ccxx - 2bccx - ccbb - ddxx - bbdd + ccdd = 0$ Troiſiéme Méthode.

Répondant à $x^4 - pxx - mx \pm q$.

Je fais $xx - 2bx + bb = 0 = xx - yx + z - cc - v = 0$

& $xx + 2bx + bb = 0 = xx + yx + z - dd + v = 0$

Je le puis, parce que y, v & z ſont indéterminées, & par conſequent peuvent être ſuppoſées telles que cette Subſtitution le demande.

Alors j'aurai $x^4 - yyxx - 2vyx + zz + 2zxx - vv = 0$

& $= xx - 2bx + bb \times xx + 2bx + bb - cc - dd$

Digitized by Google

De plus, j'ai $x^4 - yyxx - 2vyx + zz = x^4 - pxx - mx \pm q$
$+2zxx \qquad -vv$

Donc $-pxx = 2zxx - xxyy$. D. $-p = 2z - yy$.

Donc $2z = yy - p$, & $z = \frac{yy-p}{2}$.

$m = 2vy$. Donc $v = \frac{m}{2y}$.

$zz - vv = q$. Donc $q = \frac{y^4 - 2pyy + pp}{4} - \frac{mm}{4yy}$.

Donc $4qyy = \frac{4y^6 - 8py^4 + 4ppyy}{4} - mm$.

Donc $y^6 - 2py^4 + ppyy - mm = 0$.
$\qquad\qquad - 4qyy$

C'eſt viſiblement une Equation du 3e Degré, dont yy eſt une Racine, car ſi on fait $yy = t$; à la place de $y^6 - 2py^4$, &c.
on aura $t^3 - 2ptt + ppt - mm = 0$.
$\qquad\qquad\quad - 4qt$

A la place de $-2p$, mettons $-4bb$
$-2cc$
$-2dd$

A la place de pp, mettons $2bb + cc + dd$,

nous aurons $pp = 4b^4 + 4bbcc + 4bbdd + c^4 + 2ccdd + d$
ôtons-en $4q = 4b^4 - 4bbcc - 4bbdd + 4ccdd$
reſteront $+8bbcc + 8bbdd + c^4 - 2ccdd + d^4$

$m = 2bdd - 2bcc$. Donc $mm = 4bbd^4 - 8bbccdd + 4bbc^4$.

D. $y^6 - 2py^4 + ppyy - mm = y^6 - 4bby^4 + 8bbccyy - 4bbc^4$
$-4qyy \qquad -2cc + 8bbdd + 8bbccdd$
$-2dd + c^4 - 4bbd^4$
$-2ccdd$
$+ d^4$

Si vous diviſez par $yy - 4bb$, vous aurez pour Quotient $y^4 - 2ccyy - 2ddyy + c^4 - 2ccdd + d^4 = 0$.

Donc $y^4 - 2ccyy - 2ddyy + c^4 + d^4 = 2ccdd$.

D. $y^4 - 2ccyy - 2ddyy + c^4 + 2ccdd + d^4 = 4ccdd$.

Digitized by Google

Donc $yy - cc - dd = \sqrt{4ccdd}$,
& $yy = cc + dd \pm \sqrt{4ccdd} = cc + dd \pm 2cd$.

Cette Equation $y^6 - 2py^4 + ppyy - mm = 0$
$- 4qyy$

En faiſant $yy = t$,
je l'égale à $t^3 - 2ptt + ppt - mm = 0$.
$- 4qt$

Puis en faiſant $t = s + \frac{2p}{3}$,

j'ai $t^3 = s^3 + 2ssp + \frac{4pps}{3} + \frac{8p^3}{27}$.

J'ai $tt = ss + \frac{4ps}{3} + \frac{4pp}{9}$.

Donc $-2ptt = -2pss - \frac{8pps}{3} - \frac{8p^3}{9}$.

$ppt - 4qt = pps + \frac{2p^3}{3} - 4qs - \frac{8pq}{3}$.

Et on aura en tout

$$t^3 = s^3 + 2ssp \frac{+4pps}{3} \frac{+8p^3}{27} - mm = 0$$
$$-2ptt = -2ssp \frac{-8pps}{3} \frac{-8p^3}{9}$$
$$+ppt = \frac{3pps}{3} \frac{+2p^3}{3}$$
$$-4qt = -4qs \frac{-8pq}{3}$$

$$s^3 \ldots \frac{\ldots pps}{3} \frac{+2p^3}{27} - mm = 0$$
$$-4qs \frac{-8pq}{3}$$

Ce qui eſt une Equation du 3e Degré.

Quand on connoît s, on connoîtra $t = s + \frac{2p}{3}$.

On connoîtra yy, on connoîtra $y = \sqrt{s + \frac{2p}{3}}$.

Digitized by Google

Dès que je connois y, je connois $z = \frac{yy-p}{2}$, je connois $v = \frac{m}{2y}$. Dès-là je connois xx, puiſque $xx - yx + \left.\begin{matrix} z \\ -v \end{matrix}\right\} = 0$.

23. J'ai l'Equation $x^4 + cx^3 + mxx + nx + b = 0$. Pour la reſoudre je la ſuppoſe le Produit

de $xx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}h = 0$

$+ gx + \frac{k}{2g}$

multiplié par $xx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}h = 0$

$- gx - \frac{k}{2g}$

Ce qui donnera $x^4 + \frac{1}{2}cx^3 + \frac{1}{2}hxx + \frac{1}{4}chx = x^4 + cx^3 + mxx +$ [$nx + b$

$+ gx^3 + \frac{kxx}{2g} + \frac{1}{2}\frac{ckx}{2g} + \frac{1}{4}hh$

$+ \frac{1}{2}cx^3 + \frac{1}{4}ccxx + \frac{1}{2}ghx + \frac{1}{2}\frac{hk}{2g}$

$- gx^3 + \frac{1}{2}cgxx + \frac{1}{4}chx - \frac{1}{2}\frac{hk}{2g}$

$- \frac{1}{2}cgxx - \frac{1}{2}ghx - \frac{kk}{4gg}$

$+ \frac{1}{2}hxx - \frac{1}{2}\frac{ckx}{2g}$

$- ggxx - \frac{gkx}{2g}$

$- \frac{kxx}{2g} - \frac{gkx}{2g}$

$x^4 + cx^3 + \frac{1}{4}ccxx + \frac{1}{2}chx + \frac{1}{4}hh$

$- ggxx - kx - \frac{kk}{4gg}$

$+ hxx$

Digitized by Google

Donc 1°. $\frac{1}{4}cc - gg + h = m$. $\frac{1}{2}ch - k = n$.

$\frac{1}{4}hh - \frac{kk}{4gg} = b$.

Donc $gg = \frac{1}{4}cc + h - m$. D. $g = \sqrt{\frac{1}{4}cc + h - m}$.

2°. $k = \frac{1}{2}ch - n$. D. $kk = \frac{1}{4}cchh - chn + nn$.

3°. Donc $b = \frac{1}{4}hh - \frac{\frac{1}{4}cchh + chn - nn}{cc + 4h - 4m}$

Donc $bcc + 4bh - 4bm = \frac{1}{4}cchh + h^3 - mhh + chn - n^2 - \frac{1}{4}cchh$

Donc $h^3 - mhh + cnh - nn = 0$.
$- 4bh - bcc$
$+ 4bm$

On voit par là d'où vient qu'on a choisi ci-dessus, dans les Equations du second Degré qu'on a multipliées, les Termes fractionnez $\frac{c}{2}$, $\frac{h}{2}$, $\frac{k}{2g}$. L'Equation du 3e Degré qu'on cherchoit, en est plus simple, & n'a ni Fractions, ni Coëfficiens dans le premier Terme.

On resoud cette Equation du 3e Degré, & on a la Valeur de h.

Dès que l'on connoît h, la $\sqrt{\frac{1}{4}cc + h - m} = g$, est toute composée de Connuës, & ainsi g est Connu.

On a $b = \frac{1}{4}hh - \frac{kk}{4gg}$. Donc $4bgg = hhgg - kk$, & $kk = hhgg - 4bgg$.

Digitized by Google

Donc $k = \sqrt{hhgg - 4bgg}$. Ainſi k eſt connu.

Les Quantitez g, h, k, d'abord indeterminées, ſe determinent donc par la comparaiſon que l'on fait de l'Equation Nouvelle avec la Propoſée.

La Nouvelle ſe trouve toute compoſée de Connuës, à l'exception de x ; & les deux Racines, dont elle eſt le Produit, ſe trouvent auſſi toutes compoſées de Connuës, à l'exception de x : elles ſont du ſecond Degré, & faciles à reſoudre.

On n'a mis que des + dans la Propoſée $x^4 + cx^3 + mxx$. Il ne s'agiſſoit que de la transformer, & les ſubſtitutions ſe faiſoient plus aiſément par cette égalité de Signes.

Nouveau Cas & nouvelle Méthode.

24. Quand on peut être aſſuré que les Racines d'une Equation ſont égales, il y a une méthode très-courte d'en découvrir la valeur.

Soit $a - b = 0$ & ce qui vient de $a = b$

$$a - b = 0$$

on aura $aa - 2ab + bb = 0$.

Qu'on multiplie par ordre les termes de cette Equation par ceux d'une Progreſſion Arithmetique $c.\ c + d.\ c + 2d$. Ces expreſſions generales conviennent à toutes les Progreſſions Arithmetiques determinées.

$$aa - 2ab + bb$$

multiplié par $c.\ c + d.\ c + 2d$

On aura $aac - 2abc - 2abd$
$+ bbc$
$+ 2bbd$

& en ſubſtituant a à la place de b ſon égale, on aura viſiblement $\left.\begin{matrix} 2aac - 2aac \\ + 2aad - 2aad \end{matrix}\right\} = 0$.

Mais ſi b n'eſt pas $= a$, ce qui eſt ſous le Signe + ne ſera pas non plus égal à ce qui eſt ſous le Signe —.

Digitized by Google

Si je fais $a = 3$ & $a = 3$, j'aurai :

$$aa - 6a + 9 = 0.$$

en multipliant par 2 3 4

j'aurai $2aa - 18a + 36 = 0 =$
$2a \times a - 18 \times a + 36 = 6 \times 3 - 18 \times 3 + 12 \times 3.$
Il en auroit été de-même ſi j'avois fait $a - 4 \times a - 4$.

Mais ſi je fais $a - 3 \times a - 4 = aa - 7a + 12$, & que je multiplie par 2. 3. 4, j'aurai $2aa - 21a + 48$; & cette Equation ne peut être équivalente à zero, ſoit que l'on ſuppoſe $a = 3$, ſoit qu'on le faſſe $= 4$.

Pour la reſoudre je diviſe chaque Terme par 2, & j'ai $aa - \frac{21a}{2} + 24 = 0.$

Donc $aa - \frac{21a}{2} = \frac{441}{16} - 24$ & $a - \frac{21}{4} = \frac{\sqrt{57}}{16}$, & $a = \frac{21}{4} + \sqrt{\frac{57}{16}}$.

Si je multiplie $aa - 2ab + bb$ par $c.\ c - d.\ c - 2d \Big\} = 0$

j'aurai $+aac - 2abc = 2aac + 2aad - 2aac - 2aad = 0$
$+2abd - 2bbd$
$+bbc$

& ſi $c = 2d$, on aura $bb \times \overline{c - 2d} = 0$. Donc $aa - 2ab = aac - 2abc + 2aad = 0$,
$c \qquad c - d$
ou $aac + 2abd - 2aac = 0$, ou $2aad - aac = 0$, & $\overline{aa \times 2d} = \overline{aa \times c}$; ce qui doit arriver neceſſairement, quand $c = 2d$, comme on le ſuppoſe ici.

Si j'ai $xx - 14x + 49 = 0$, j'aurai en multi-
2 1 0
pliant $2xx - 14x = 0$; d'où je conclurai $xx = 7x$, & $x = 7$.

Digitized by Google

Les Signes ſont des expreſſions preciſes & abregées, dont les Combinaiſons, faites ſelon les regles, ſont équivalantes à de juſtes raiſonnemens. Ce ſont des expreſſions generales applicables à tous les cas. On peut aiſément pouſſer ce Calcul demonſtratif aux Equations plus élevées, en faiſant les Subſtitutions convenables.

Si j'éleve à la 4e Puiſſance $x - 5 = 0$, j'aurai $x^4 - 20x^3 + 150xx - 500x + 625 = 0$. { Je fais la Multiplic.

4 3 2 1 0

& j'ai $4x^4 - 60x^3 + 300xx - 500x = 0$,
& en diviſant par x,
j'ai $4x^3 - 60xx + 300x - 500 = 0$. { Je multiplie encore,

3 2 1 0

& j'ai $12x^3 - 120xx + 300x = 0$, & en diviſant par x,
j'ai $12xx - 120x + 300 = 0$. { Je continuë encore à multiplier,

2 1 0

& j'ai $24xx - 120x = 0$, & en diviſant par x, j'ai $24x = 120$, & $x = \frac{120}{24} = 5$.

On abrege en faiſant tout d'un coup :

$x^4 - 20x^3 + 150xx - 500x + 625 = 0$
4 3 2 1 0
3 2 1 0
2 1 0

$24x^4 - 120x^3 = 0$. D. $24x - 120 = 0$, & $x = \frac{120}{24} = 5$.

Si j'avois élevé $x - 3$ à la 3e Puiſſance, j'aurois eu $x^3 - 9xx + 27x - 27 = 0$

3 2 1 0
2 1 0

$6x^3 - 18xx = 0$, & $6x = 18$, & $x = \frac{18}{6} = 3$.

Digitized by Google

Mais ſi je multiplie cette 3e Puiſſance par $x - 2 = 0$, j'aurai la 4e.

$x^4 - 11x^3 + 45xx - 81x + 54 = 0$. Les quatre Racines ne ſont pas égales, il n'y en a que trois. Ainſi, en faiſant deux Diviſions par $\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$ ou 12. 6. 2. 0. J'ai $12x^4 - 66x^3 + 90xx = 0$, & $12xx - 66x + 90 = 0$. Dans cette Equation du ſecond Degré $= xx - \frac{66x}{12} + \frac{90}{12} = 0 = xx - \frac{11x}{2} + \frac{15}{2} = 0$; $x = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} - \frac{15}{2}} = \frac{11}{4} \pm \frac{1}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{5}{2} \end{cases}$

Si par la Racine $x - 3 = 0$, je diviſe la 4e Puiſſance $x^4 - 11x^3$, &c. j'aurois une 3e Puiſſance; & ſi je la diviſe encore par $x - 3$ (ou parce que j'ai fait deux Multiplications, ſi je diviſe tout d'un coup cette 4e Puiſſance par la ſeconde $xx - 6 + 9$) j'aurai pour Quotient la ſeconde Puiſſance $xx - 5x + 6 = 0$. Ses Racines ſont $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$ $= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$.

Arrangement des Racines.

25. Dès qu'on reconnoît cette verité, que les Expreſſions Algebriques ſont un langage abregé, mais précis, juſte, & s'étendant à tous les Cas déterminez auxquels on peut faire l'application de ces termes generaux & ſans équivoques, on fait $x = \begin{cases} g \\ p \end{cases}$, & $x = \begin{cases} f \\ h \end{cases}$.

Dès-là on a $xx \begin{matrix} - g x \\ - p x \end{matrix} + gp = 0$, & $xx \begin{matrix} - f x \\ - h x \end{matrix} + fh = 0$, & en multipliant ces deux

Equations du ſecond Degré, on a l'Equation du 4e.

$$\begin{array}{l} x^4 - fx^3 + fhxx - gfhx + gpfh \\ \quad - hx^3 + gfxx - pfhx \\ \quad - gx^3 + ghxx - gpfx \\ \quad - px^3 + pfxx - gphx \\ \qquad + phxx \\ \qquad + gpxx \end{array}$$

& par là on demontre 1°. Que quand toutes les Racines ſont Poſitives, les Termes ont alternativement + & —.

2°. Le ſecond Terme, où x eſt à la 3e Puiſſance, a pour Coëfficient la Somme des quatre Racines.

3°. Le 3e, où x eſt à la ſeconde Puiſſance, a pour Coëfficient la Somme des Produits des quatre Racines combinées deux à deux.

4°. Le 4e, où x eſt lineaire, a pour Coëfficient la Somme des Produits des Racines, priſes trois à trois.

5°. De là il ſuit que ſi les quatre Racines étoient égales, chaque Terme ſeroit égal à x^4.

6°. Si l'on a $x^4 - cx^3 + mxx - nx + b = 0$, on aura 1°. $c = f + h + g + p$. 2°. $m = gf + gh + gp + pf + ph + fh$. 3°. $n = gfh + gpf + gph + pfh$. $b = gpfh$.

Exemples. 26. Soit $x^3 - 15xx + 75x - y^3 = 0$, & en multipliant par 3 2 1 0

Donc $3x^3 - 30xx + 75x = 0$, & diviſant par $3x$, on a $xx - 10x + 25 = 0$, & multipliant par 2 1 0

on a $2xx - 10x = 0$. Donc $2x - 10 = 0$. Donc $2x = 10$, & $x = 5$.

Digitized by Google

AUTRE EXEMPLE.

1°. On ſuppoſe $ax = yy$. Cela dépend de la valeur de l'Inconnuë x, qui eſt indéterminée, & qu'on ſuppoſe telle que cette Equation le demande.

2°. On ſuppoſe $x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$.

3°. On ne connoît que a, & l'on ſçait ſeulement que y n'a qu'une Valeur.

On a donc $axx = ax = as - a\sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$
$= as - \sqrt{aarr - aatt - 2aaty - aayy}$.

Donc $\sqrt{aarr - aatt}$, &c. $= yy + as$.
Donc $aarr - aatt - 2aaty - aayy = aass - 2asyy + y^4$.

Donc $y^4 - 2asyy + 2aaty + aass = 0$
$+ aayy \quad - aarr$
$+ aatt$

je multiplie 4 * 2 1 0
& j'ai $4y^4 - 4asyy + 2aaty = 0$
$+ 2aayy$

Car dans la place, où y^3 devroit être, il n'y a rien, ce qui prouve que l'Equation reſulte de Racines qui ſe détruiſent dans ce Terme.

En diviſant par $2y$, j'ai $2y^3 - 2asy + aat = 0$
$+ aay$

Je multiplie encore par 2 1 0 −1
& j'ai $4y^3$ * * $-aat = 0$.

Donc $t = \frac{4y^3}{aa}$.

Reſte maintenant à égaler y avec des t.

Digitized by Google

J'avois $y^4 * \begin{matrix} -2asyy + 2aaty + aass = \bullet \\ +aayy \quad -aarr \\ +aatt \end{matrix}$

Je multiplie 4. 3. 2. 1. 0.

& j'ai $4y^4 * \begin{matrix} -4asyy + 2aaty = 0 \\ +2aayy \end{matrix}$

Je multiplie encore 0. 1. 2. 3.

& j'ai $\begin{matrix} -8asyy + 6aaty = 0. \\ +4aayy \end{matrix}$

Donc $\begin{matrix} -8asy + 6aat = 0. \\ +4aay \end{matrix}$

& $\begin{matrix} -4asy + 3aat = 0. \text{ Donc } 3aat = 4asy \\ +2aay \end{matrix}$

$-2aay$. Donc $y = \frac{3aat}{4as-2aa}$, ou $y = \frac{3at}{4s-2a}$.

Il faut encore faire évanoüir une des Inconnuës de cette Fraction.

Soit $s = v + \frac{a}{2}$, l'Indéterminée v permet cette ſuppoſition.

Donc $s - \frac{a}{2} = v$. Donc $s - \frac{a}{2} * 4 = 4s - 2a = 4v$. Donc $y = \frac{3at}{4v}$.

Donc $y^3 = \frac{27a^3t^3}{64v^3}$, & $aat = 4y^3 = \frac{4 \times 27a^3t^3}{64v^3} = \frac{27a^3t^3}{16v^3}$.

Donc $16aatv^3 = 27a^3t^3$. Donc $16v^3 = 27att$. Donc $v^3 = \frac{27att}{16}$.

Or $v = s - \frac{a}{2}$. Donc $v^3 = s^3 - \frac{3ass}{2} + \frac{3saa}{4}$

Digitized by Google

$-\frac{a^3}{8}$, & $16v^4 = 27att$, ſera $= 16s^4 - 24ass + 12saa - 2a^3$,

& $16s^4 - 24ass + 12saa - 2a^3 = 0$.
$\quad - 27att$

Dès là on peut déterminer s par rapport à t, & faire $t = s \pm \frac{a}{3}$; après quoi l'on aura $tt = \overline{s \pm \frac{a}{3}}^2$. Donc $16s^4 - 24ass + 27a\overline{-s + \frac{a}{3}}^2$

& $s^4 - \frac{24ass}{16} + \frac{3aas}{4} - \frac{a^3}{8} = 0$
$\quad - \overline{s \pm a} \times \frac{27a}{16}$

On fera évanoüir le ſecond Terme de cette Equation du 3e Degré. Dès là on la reſoudra, & on aura la Valeur de s, qui donnera celle de t.

Dès que t & s ſeront connuës, on connoîtra y, & par conſequent yy. Par conſequent $\frac{yy}{a} = x$ & dans l'Equation d'abord propoſée, il n'y aura plus d'inconnu que x.

$x^3 * - 10yx + y^3 = 0$
3 2 1 0

$3x^4 - 10yx = 0$.

Donc $3xx = 10y$, & $y = \frac{3xx}{10}$, & $y^3 = \frac{27x^6}{1000}$

Donc $x^3 - 10yx + \frac{27x^6}{1000} = 0$. Mais $y = \frac{3xx}{10}$. Donc $y \times 10x = 10xy = \frac{3xx}{10} \times 10x$

Digitized by Google

$= 3x$. Donc $x^3 - 3x^3 + \frac{27x^6}{1000} = 0$. Donc $\frac{27x^6}{1000} = 2x^3$, & $27x^6 = 2000x^3$, & $27x^3 = 2000$, & $x^3 = \frac{2000}{27}$.

Donc $x = \sqrt[3]{\frac{2000}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{27}} * \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{\frac{1000}{27}} = \frac{10}{3}\sqrt{2}$.

Donc $x^3 = \frac{2000}{27}$, & $x^6 = \frac{4000000}{27 \times 27}$.

Donc $27x^6 = \frac{4000000}{27}$.

Donc $\frac{27x^6}{1000} = y^3 = \frac{4000}{27}$, & $x^3 + y^3 = \frac{6000}{27} = 3x^3 = 10yx$.

Donc $x^3 - 10yx + y^3 = \frac{6000}{27} - \frac{6000}{27} = 0$.

J'exprimerai la même chose en general.

Que dans $x^3 * - ayx + y^3 =$

$$\underset{3x^3 * - ayx = 0.}{\overset{3 \quad 2 \quad 1 \quad 0}{\overline{\qquad\qquad}}}$$

les Racines soient toutes de la même valeur.

Donc $3x^3 - ayx = 0$. Donc $3x^3 = ayx$, & $3xx = ay$, & $y = \frac{3xx}{a}$ & $y^3 = \frac{27x^6}{a^3}$ Donc $x^3 - ayx + y^3 = x^3 - 3x^3 + y^3 = x^3 - 3x^3 + \frac{27x^6}{a^3}$. Donc $-2x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 0$. Donc $27x^6 = 2a^3x^3$, & $27x^3 = 2a^3$, & $x^3 = \frac{2a^3}{27}$

Donc $x = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{27}} = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$.

On

Digitized by Google

On auroit pû multiplier $x^3 - ayx + y^3 = 0$ par $\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$

& on auroit eu $-2ayx + 3y^3 = 0$

Donc $2ax = 3yy$, & $x = \frac{3yy}{2a}$. D. $xx = \frac{9y^4}{4aa}$; & puiſque $3xx = ay$, $xx = \frac{ay}{3}$. Donc $\frac{ay}{3} = \frac{9y^4}{4aa}$.

Donc $\frac{9y^3}{4aa} = \frac{a}{3}$, & $9y^3 = \frac{4a^3}{3}$. Donc $27y^3 = 4a^3$. Donc $y^3 = \frac{4a^3}{27} = \frac{a^3}{27} \times 4$, & $y = \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$.

Or $x = \frac{3yy}{2a}$, & $yy = \sqrt[3]{\frac{4a^3}{27}} \times \sqrt[3]{\frac{4a^3}{27}} = \sqrt[3]{\frac{16a^6}{27 \times 27}}$.

Donc $x = \frac{3yy}{2a} = \frac{3}{2a}\sqrt[3]{\frac{16a^6}{27 \times 27}} = \sqrt[3]{\frac{27 \times 16a^6}{8a^3 \times 27 \times 27}}$

$= \sqrt[3]{\frac{16a^6}{8a^3 \times 27}} = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{27}} = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$.

Ce que l'on vient de trouver par une autre Méthode.

27. On vient de voir des Exemples du grand uſage qu'on peut faire des Subſtitutions. Dès qu'on s'eſt rendu bien attentif à la nature de la choſe ſur laquelle roule la Queſtion, & qu'on s'eſt rendu familieres les differentes parties qui compoſent cette Queſtion, on verra aiſément dans quels termes Algebriques on doit s'exprimer, & on découvrira de même ceux qui peuvent ſervir à diſſiper l'obſcurité qui reſte dans quelques-uns, & preſenter ce qu'on cherche à connoître ſous des faces plus ſimples, & où le Connu ſoit moins mêlé avec l'Inconnu. Remarque ſur l'uſage des Subſtitutions.

C'eſt par le moïen des Subſtitutions qu'on change aiſément la Racine d'une Equation en une plus grande ou plus petite, par Addition, Soustraction, Multiplication & Diviſion.

Digitized by Google

J'ai $xx - 6x + 9 = 0$. Je veux augmenter x de 2, quoique je ne la connoiſſe pas encore. Je fais donc $x + 2 = y$. Donc $x = y - 2$.

Dès là, à la place de x & ſes Puiſſances, je mets $y - 2$ & ſes Puiſſances, & au lieu de $xx - 6x + 9 = 0$, j'ai $yy - 4y + 4 = yy - 10y + 25 = 0$
$- 6y + 12$
$+ 9$

Dans la premiere $x = 3$, & dans la ſeconde $y = 5 = x + 2$.

Si je voulois abaiſſer y de 2, je ferois $y - 2 = x$. Donc $y = x + 2$, & j'aurois au lieu de $yy - 10y + 25 = 0$, $xx + 4x + 4 = xx - 6x + 9 = 0$.
$- 10x - 20$
$+ 25$

Si voulois une Equation dont la Racine ne valût que le $\frac{1}{3}$ de x, je ferois $x = \frac{y}{3}$, ou plûtôt $x = 3z$, & à la place de x je mettrois $3z$, & j'aurois $9zz - 18z + 9 = 0$, & $zz - \frac{18z}{9} + \frac{9}{9} = zz - 2z + 1 = 0$, dont la Racine eſt $z = 1$; & ſi je voulois tripler z, je ferois $y = 3z$. Donc $z = \frac{y}{3}$. Donc $zz - 2z + 1 = \frac{yy}{9} - \frac{2y}{3} + 1 = 0$
$= yy - \frac{18y}{3} + 9 = yy - 6y + 9$, dont la Racine eſt $y = 3 = 3z$.

C'eſt encore en ſubſtituant qu'on fait évanoüir les Incommenſurables.

J'ai $x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^3b^3 = 0$.

Je fais $y = x\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2} = \frac{y}{x}$, & $x = \frac{y}{\sqrt{2}}$,

& $xx = \frac{yy}{2}$,

& $\frac{yy}{2} \times x = \frac{yy}{2} \times \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{y^3}{2\sqrt{2}} = \frac{y^3}{\sqrt{8}}$.

Digitized by Google

$2ax^3\sqrt{2} = 2ax^3 * \frac{y}{x} = 2axxy$. Or $xx = \frac{yy}{2}$.

Donc $2ay * xx = \frac{2ay^3}{2} = ay^3$.

J'ai donc $x^4 + ay^3 + 8abx^2 - 2a^2b^2$, reſte $a^3x\sqrt{8}$; ſur quoi je remarque, 1°. Que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Donc $x\sqrt{8} = x * 2\sqrt{2}$. Or $\sqrt{2} = \frac{y}{x}$.

Donc $x\sqrt{8} = 2x * \frac{y}{x} = 2y$, & $a^3x\sqrt{8} = 2a^3y$.

Or, puiſque $xx = \frac{yy}{2}$. $x^4 = \frac{y^4}{4}$.

On aura donc $\frac{y^4}{4} + ay^3 + 4abyy - 2a^3y - 2a^2b^2 = 0$.

Et dès là $y^4 + 4ay^3 + 16abyy - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$.

28. Si j'avois $x = 2$, & $x = \sqrt{3}$, j'aurois deux Valeurs de x dans l'Equation $xx - 2x + 2\sqrt{3} - x\sqrt{3}$. Remarques ſur les Incommenſurables.

Pour faire évanoüir les Incommenſurables, je ſuppoſe $\sqrt{3} = \frac{y}{x}$.

Comme, dans l'Equation preſente x a deux Valeurs, & que l'on a $x = \begin{cases} 2 \\ \sqrt{3} \end{cases}$, la Fraction $\frac{y}{x} = \begin{cases} \frac{y}{2} \\ \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$ Dans le dernier cas $\frac{y}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3}{\sqrt{3}}$, & dans y deux Valeurs, quand je fais $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$, j'aurai donc $y = x\sqrt{3}$, & $-y = -x\sqrt{3}$, j'aurai donc

$$xx - 2x + 2\sqrt{3} = 0 = xx - 2x + \frac{2y}{x} = 0.$$
$$-x\sqrt{3} \qquad\qquad -y$$

Digitized by Google

Il faut faire en ſorte qu'il n'y ait plus dans l'Equation que des y.

J'ai $y = x\sqrt{3}$. Donc $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$, & $xx = \frac{yy}{3}$.

J'ai donc $\frac{yy}{3} - y - 2x + \frac{2y}{x} = 0$, & $\frac{yy}{3} - y = 2x - \frac{2y}{x}$. Donc $\frac{y^4}{y} - \frac{2y^3}{3} + yy = 4xx - \frac{8xy}{x} + \frac{4yy}{xx} = \frac{4yy}{3} - 8y + 12$.

Donc $\frac{y^4}{9} - \frac{2y^3}{3} + 1yy + 8y - 12 = \frac{y^4}{9} - \frac{2y^3}{3} - \frac{4yy}{3} - \frac{yy}{3} + 8y - 12 = 0$.

Donc $y^4 - 6y^3 - 3yy + 72y - 108 = 0$.

Voila une Equation du 4e Degré qui ſe preſente ſans Incommenſurables ; cependant elle reſulte de divers Produits, où ſont entrez des Incommenſurables, & en la compoſant, on a vû que y, entre ſes Valeurs, équivaloit à des Incommenſurables. Quand donc il me ſeroit venu dans l'eſprit d'écrire cette Equation & de la donner à reſoudre, j'aurois propoſé, ſans le ſçavoir, une Equation toute telle qu'elle proviendroit de la Multiplication de quelques autres plus abaiſées & plus compoſées d'Incommenſurables, ſans détruire effectivement leur incommenſurabilité qui ſe découvriroit neceſſairement par la Reſolution.

Fig. I. On peut abreger une Solution par le ſecours de la Geometrie, & la faciliter entierement. $AB = 3c$. Soit donc $AB = 3$, & $BC = c$. $\overline{BD} = \overline{AB \times BC} = 3 \times 1$. Donc $BD = \sqrt{3 \times 1} = \sqrt{3}$.

Dans l'Equation $xx - 2x + 2\sqrt{3}$, je fais $AE = 2$,

$-x\sqrt{3}$

& j'ai $\overline{2+\sqrt{3}} \times x = \overline{AE+BD} \times x$. Soit $AE+BD=f$, j'aurai $xx-fx+2\sqrt{3}=0$. Or $2\sqrt{3}=AE \times BD$. Soit $AE=a$, $BD=b$, j'aurai $xx-fx+ab=0$.

Dès là j'ai $x=\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\frac{ff}{4}-ab}$.

Je quarre $\frac{1}{2}f=\frac{1}{2}AE+\frac{1}{2}BD$. Je fais $a.g::g.b$, & j'ai $gg=ab$. J'ôte gg de $\frac{\overline{AE+BD}^2}{2}$. Le côté du Quarré qui me reste, ajoûté & retranché de $\frac{f}{2}=\frac{AE+bD}{2}$, donne les deux Valeurs de x.

Si j'avois élevé le Demi Cercle ADC sur un plus grand Diametre, $BC=1$ auroit été plus grande; mais AB & AC auroient augmenté dans la même Proportion, & x aussi. Par là le Rectangle fx auroit toûjours été égal à la Somme du Quarré de x, & du Rectangle AB, & les Figures, où les Coupées auroient été de telles x, auroient pû demeurer de même nature, en devenant proportionnellement plus grandes ou plus petites.

Si j'avois $c-d+\sqrt{3}=\sqrt{x}$, je ferois $c-d=f$, & j'aurois $f+\sqrt{3}=\sqrt{x}$. Soit $BD=\sqrt{3}$; à la Ligne BD, je joindrois la Ligne f, j'aurois donc $BD+f=g=\sqrt{x}$. Donc $gg=x$. Donc le côté $g=$ aux Lignes $BD+f=\sqrt{x}$.

Si j'avois fait évanoüir les Incommensurables, j'aurois dit $f+\sqrt{3}=\sqrt{x}$. Donc $ff+2f\sqrt{3}+3=x$. Donc $2f\sqrt{3}=x-ff-3$. Donc $\sqrt{4ff \times 3}=x-ff-3$. Donc $12ff=xx-2ffx-6x+f^4+6ff+9$. Donc $xx-2ffx+f^4-6x+6ff+9=0$

Cette derniere Equation preſente les Incommenſurables évanoüis; mais comme ils ont ſervi à la former, ils ſe retrouveront quand on la reſoudra; & par là on aura pris une peine inutile, en travaillant à les faire diſparoître.

CHAPITRE XXV.

De l'Analyſe.

1. L'Analyſe fait uſage des Operations qu'on a expliquées dans les Chapitres précedens pour reſoudre les Problêmes & les Queſtions que l'on propoſe.

2. Pour reſoudre une Queſtion, il faut d'abord ſe rendre attentif aux parties qui la compoſent, remarquer combien il y en a, les dégager l'une de l'autre, ſe les rendre familieres, afin de les manier & de les combiner aiſément.

3. Il faut diſtinguer ce que l'on ſuppoſe, & que l'on donne pour Connu, d'avec ce qui ne l'eſt pas, & que l'on cherche à connoître.

4. Si l'on ne connoiſſoit abſolument rien dans les parties dont on cherche à ſe procurer une plus exacte connoiſſance, il ſeroit inutile d'entreprendre de les découvrir; on ne ſçauroit par quelle route en approcher, & quand on y ſeroit parvenu, on ne ſçauroit encore point ſi l'on auroit trouvé préciſément ce que l'on cherchoit, ou quelque autre choſe, puiſqu'on n'auroit aucun caractere pour s'en aſſurer. Ce qui eſt inconnu & qu'on cherche à connoître parfaitement, n'eſt donc inconnu qu'en partie; & l'on connoît une partie de ſes rapports avec ce qui eſt déja connu, quoiqu'on

Digitized by Google

en ignore le reſte, & on veut ſe ſervir de ce qu'on ſçait pour parvenir à ce qu'on ne ſçait pas.

5. On ſe rend bien attentif à chaque Rapport de ce qui eſt connu avec ce qui ne l'eſt pas; & pour prevenir que l'eſprit ne ſe trouble par la multitude de ces Rapports, pour les comparer avec plus de facilité, & en tirer plus ſûrement les conſequences qui en doivent naître, on exprime toutes ces Parties & tous leurs Rapports par des expreſſions bien préciſes & bien nettes, qui non ſeulement les preſentent à l'eſprit, mais les mettent ſous les yeux tels qu'ils ſont.

6. On ſe ſert des premieres Lettres de l'Alphabet pour deſigner ce qui eſt connu. On emploïe les dernieres pour marquer ce qui ne l'eſt pas. Un Nombre, une Ligne, une Surface donnée, je l'appellerai a : ſes Puiſſances ſeront a^2, a^3, &c. ſa moitié s'exprimera par $\frac{a}{2}$: ſes Puiſſances $\frac{a^2}{4}$, $\frac{a^3}{8}$: ſes Racines par $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, &c. Ou pour plus grande commodité, ſi j'exprime a par bb, la $\sqrt[2]{a}$ ſera $= b$. Si je fais $a = c^3$, j'aurai $\sqrt[3]{a} = c$. Si je cherchois un Nombre, qui, multipliant le tiers de a, fît naître un Produit égal à la Racine Quarrée de a. Ce Nombre que je ne connois pas encore, je l'appelle x, & après avoir fait $a = bb$, j'ai $\frac{bb}{3} = \frac{a}{3}$; j'ai $\frac{bb}{3} \times x = \frac{a}{3} \times x$. J'ai donc $\frac{bbx}{3} = b$. Voila de quelle maniere le Connu ſe mêle avec l'Inconnu, en vertu d'un Rapport marqué.

7. Si je pouvois faire en ſorte de n'avoir d'un côté que x, & d'un autre que des Quantitez connuës, x égalé par cette Operation à ce qui eſt entierement connu, ne ſeroit plus ignoré. C'eſt

là le but de l'Analyſe, & c'eſt un but qu'il ne faut jamais perdre de vûë. Les Operations precedentes fourniſſent divers ſecours pour y parvenir. Quand on s'eſt rendu ces Operations familieres, & qu'on a bien diſtinctement l'état de la Queſtion, on choiſit aiſément celles qui ſont les plus propres pour arriver à ce qu'on cherche. Dans le cas precedent, par exemple, dès que j'ai $\frac{bbx}{3} = b$. En multipliant chaque Membre par 3, j'aurai $bbx = 3b$. En diviſant chaque Membre par b, j'aurai $bx = 3$, & en diviſant encore par b, j'ai enfin $x = \frac{3}{b}$. Si $bb = 4$, b ſera 2, & $\frac{3}{b} = \frac{3}{2}$. Or ſi par $\frac{3}{2} = x$, on multiplie $\frac{bb}{3} = \frac{4}{3}$, on aura $\frac{12}{6} = 2 = b$. Pour peu que l'on ſoit exercé à ces Calculs, on void d'un coup d'œil ce que je viens de détailler parties à parties.

8. Pour faciliter les Comparaiſons, on décharge autant qu'on peut chaque Membre d'une Equation, afin d'avoir moins de choſes à comparer. Voila pourquoi on efface de côté & d'autre toutes les Quantitez qui ſe trouvent ſous le même Signe. Si j'avois $a + 2b - c + d = x + b - c + \frac{d}{3}$, je changerois cette Equation en celle-ci $a + b + \frac{2d}{3} = x$.

9. On tranſporte auſſi d'un Membre à un autre les Quantitez du même nom, en les y faiſant paſſer ſous des Signes contraires $a + b = x - b$. Donc $a + 2b = x$. $a - b = x + b$. D. $a - 2b = x$.

10. Lorſque les Membres d'une Equation ſont

fractionez, la Solution en devient quelquefois plus aisée, en operant avec des Entiers : on les substituë donc aux Fractions, sans changer l'égalité des Membres. Pour cet effet on multiplie chaque Membre par le Denominateur de la Fraction. $a + b + \frac{2d}{3} = x$. Donc $3a + 3b + 2d = 3x$. La Fraction $\frac{2d}{3}$ multipliée par 3 se trouve changée en $2d$. Si j'avois eu $a + b + \frac{2d}{3} = \frac{2x}{5}$, j'aurois fait, 1°. $3a + 3b + 2d = \frac{6x}{5}$. 2°. $15a + 15b + 10d = 6x$. Et comme a, b, d, sont des Quantitez Connuës, je les somme, & je fais $15a + 15b + 10d = c$. Donc $c = 6x$. Dès là j'ai $\frac{c}{6} = x$.

11. On void donc, & on l'a déja vû dans l'Article 7, que les Membres d'une Equation se dégagent en les divisant chacun par la même Quantité.

12. De cette maniere on abaisse les Puissances & on rend les Operations plus aisées. $a + b^3 = xxb^3aa$. En divisant par b^3, j'ai $\frac{a}{b^3} + bb = xxaa$. Le premier Membre est tout composé de Connuë; voila pourquoi j'en somme les parties, & je fais $\frac{a}{b^3} + bb = c$. Dès là j'ai $\frac{c}{aa} = xx$, & en faisant $\frac{c}{aa} = dd$, j'ai $dd = xx$, & $d = x$.

13. On éleve aussi les Racines Sourdes à leurs Puissances, j'ai $\sqrt[2]{xb} = a - b$. Donc $xb = aa - 2ab + bb$. Donc $x = \frac{aa - 2ab + bb}{b}$. Tout le Connu est d'un côté.

Digitized by Google

Si j'ai $\sqrt[2]{ab-ac}-f=x$. D. $\sqrt[2]{ab-ac}=x+f$. Donc $ab-ac=xx+2fx+ff$. Donc $ab-ac-ff=xx+2fx$, & en faiſant $ab-ac-ff=d$, j'ai $d=xx+2fx$, ou l'Equation du ſecond Degré $xx+2fx-d=0$.

On met donc ici en uſage tout ce qu'on a appris pour faire évanoüir, autant qu'il eſt poſſible, les Incommenſurables.

14. On tire auſſi un grand avantage des Proportions, car ſi $a.b::c.x$, on a $bc=ax$, & $\frac{bc}{a}=x$, tout le Connu d'un côté.

15. Comme les Queſtions de Phyſique, de Morale, &c. ſe reſolvent & ſe demontrent beaucoup plus aiſément, en mettant la Définition à la place du Défini, parce que les idées dévelopées par une Définition, ſe comparent beaucoup plus aiſément & beaucoup plus nettement, & preſentent enfin beaucoup mieux leurs rapports à l'eſprit, que quand elles ſont confonduës ſous l'envelope d'un ſeul terme; de même auſſi les rapports des Quantitez que l'on compare, ſe laiſſent voir d'autant plus aiſément, que ces Quantitez ſont plus dévelopées, par le moïen des expreſſions dont on ſe ſert pour les deſigner. Et comme il n'eſt pas toûjours neceſſaire de rapporter toute la Définition d'une idée dont on veut tirer quelque preuve, mais qu'il ſuffit de choiſir pour ſa Définition ce qui convient au ſujet auquel on veut l'appliquer; il faut de même qu'entre les differens Noms que l'on peut donner à une Grandeur, ou les differens Signes par leſquels on peut l'exprimer, choiſir préciſément ceux qui ſont les plus propres à éclaircir le Calcul pour lequel on veut l'emploïer.

16. En s'accoûtumant de conduire ſes penſées

Digitized by Google

dans un grand ordre, on contracte l'habitude d'exprimer les Quantitez que l'on compare, & dont on cherche les proprietez par des Noms qui ſervent à manifeſter les Rapports que l'on ſouhaite de connoître plus diſtinctement.

17. Au lieu d'exprimer chaque Quantité par une Lettre differente, il vaut mieux emploïer les mêmes Lettres, differemment liées par les Signes + & —, ſuivant le beſoin. Ainſi quand j'ai deux Quantitez g, & p, dont la Difference eſt d, je ferai $g - d = p$, & $p + d = g$.

18. De plus, je connois la Somme de g & de p, & je l'appelle s. J'ai donc $s = g + p$. Donc $s - p = g$. Et puiſque $g = p + d$, j'aurai $s - p = p + d$. Donc $s = 2p + d$.

Donc $\frac{1}{2} s = p + \frac{1}{2} d$. Donc $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} d = p$.

J'apprens par là que quand deux Quantitez ſont inégales, la moitié de leur ſomme, moins la moitié de leur Difference, eſt égale à la Petite.

On découvrira de même que la moitié de la Somme, plus la moitié de la Difference, eſt égale à la Grande.

Car puiſque $s - g = p$, & que $p = g - d$, j'aurai $s - g = g - d$. Donc $s = 2g - d$, & $s + d = 2g$, & $\frac{s+d}{2} = g$.

19. Puiſque $s = 2g - d$, donc $s + d = 2g$, & $d = 2g - s$. Puiſque $s = 2p + d$, donc $d = s - 2p$: & ainſi $2g - s = s - 2p$. Et en effet $2s$ (double ſomme) $= 2g + 2p$ double ſomme auſſi.

20. $g = \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} d$. $p = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} d$.

Digitized by Google

Donc $gp = \frac{s+d}{2} * \frac{s-d}{2} = \frac{ss+sd-dd-sd}{4}$

$= \frac{ss-dd}{4}$. Ce qui m'apprend que le Rectangle ſous deux Quantitez inégales, eſt égal au quart du Quarré de leur ſomme, moins le quart du Quarré de leur Difference. Et de là encore je conclus que $ss-dd = 4gp$.

21. Si les Quantitez ſont égales, qu'on appelle chacune du même Nom e, leur Produit ou Quarré ſera ee, leur Somme $2e$, ſon Quarré $4ee$, ſon Quart ee. La difference de e à e eſt $= 0$.

Donc $e * e = \frac{4ee}{4} - \frac{0}{4}$.

22. $g = \frac{s+d}{2}$. D. $gg = \frac{ss+2ds+dd}{4} = \frac{ss+dd}{4} + \frac{ds}{2}$, & par la même raiſon $pp = \frac{ss+dd}{4} - \frac{ds}{2}$.

23. Si on fait $gg + pp = Q$, on aura $Q = 2 * \frac{ss+dd}{4} + \frac{ds-ds}{2} = \frac{ss+dd}{2}$; c'eſt-à-dire, que les Quarrez de deux Quantitez égalent le Quarré de leur Somme, plus le Quarré de leur Difference.

24. $pp = \frac{ss+dd}{4} - \frac{ds}{2}$.

Donc $-pp = -\frac{ss-dd}{4} + \frac{ds}{2}$,

& $gg - pp = \left.\begin{array}{l} +\frac{ss+dd}{4} + \frac{ds}{2} \\ -\frac{ss-dd}{4} + \frac{ds}{2} \end{array}\right\} = \frac{2ds}{2} = ds$;

c'eſt-à-dire, que la Difference des Quarrez de deux Quantitez eſt égal au Produit de leur Somme par leur Difference.

Digitized by Google

25. En pouſſant ce jeu de Combinaiſons & de tranſpoſitions, on ne découvre pas ſeulement un grand nombre de Theorêmes curieux, mais on ſe fait à l'habitude de donner aux Quantitez que l'on compare les noms qui leur conviennent, par rapport aux découvertes qu'on ſe propoſe.

26. $gg = \frac{ss+dd}{4} + \frac{ds}{2}$. $pp = \frac{ss+dd}{4} - \frac{ds}{2}$.

Donc $gg+pp = 2 \times \frac{ss+dd}{4} = \frac{ss+dd}{2}$.

Or $pp = \frac{ss+dd}{4} - \frac{ds}{2}$. Donc $gg+pp = 2gg$

$+gg-pp$

$= \left.\begin{array}{l} \frac{ss+dd}{2} + \frac{ss+dd}{4} + \frac{sd}{2} \\ -\frac{ss-dd}{4} + \frac{sd}{2} \end{array}\right\} = sd$; c'eſt-à-dire, que deux Quarrez de la Grande, égalent la Somme des deux Quarrez, plus la Difference de ces mêmes Quarrez.

27. De la Somme des Quarrez $gg+pp$, retranchez leur Difference $gg-pp$, vous aurez

$gg+pp = 2pp$. Or $gg+pp = \frac{ss+dd}{2} + 2$

$-gg+pp$

& $gg-pp = \left.\begin{array}{l} \frac{ss+dd}{4} + \frac{sd}{2} \\ \frac{-ss+dd}{4} + \frac{sd}{2} \end{array}\right\} = sd$.

Donc $-gg+pp = -sd$.

Donc $\begin{array}{l} gg+pp = 2pp = \frac{ss+dd}{2} - sd. \\ -gg+pp \end{array}$

Donc ſi de la Somme des Quarrez, on retranche la Difference des Quarrez, on aura deux fois le Quarré de la petite Quantité.

28. $d = g-p$. Donc $dd = gg+pp-2gp$.

Digitized by Google

Donc le Quarré de la Difference de deux Quantitez égale le Quarré de la Grande, & le Quarré de la Petite, moins deux Rectangles ſous ces Quantitez.

29. Si l'on joint en un la Somme des Quarrez Q, & le Quarré de la Difference des Quantitez, on aura $Q + dd = Q + gg + pp - 2gp$. Or $Q = \frac{ss+dd}{2}$. Donc $Q + dd = \frac{ss}{2} + \frac{dd}{2} + dd$ $= \frac{ss}{2} + \frac{dd}{2} + \frac{2dd}{2} = \frac{ss+3dd}{2}$.

Mais $Q = gg + pp$, & $dd = gg + pp - 2gp$. Donc $Q + dd = 2gg + 2pp - 2gp$.

La même verité ſe preſente ſous diverſes formes; & de ces Expreſſions qui la renferment, on choiſit celle qui peut répandre un plus grand éclairciſſement ſur la Solution que l'on cherche.

30. Je veux connoître ce qui reſultera de la Somme des Quarrez Q, ſi l'on ôte dd, le Quarré de la Difference: j'ai bien $Q - dd$; mais je veux l'exprimer autrement, & par les Lettres g & p. $Q = gg + pp$. $dd = gg + pp - 2gp$.

Donc $Q - dd = +gg + pp + 2gp = 2gp$;
$-gg - pp$

on aura donc deux fois le Rectangle ſous les deux Quantitez.

31. Si l'on multiplie la Somme s par la Difference d, on aura bien sd, mais $s = g + p$, & $d = g - p$. Donc $s \times d = g + p \times g - p = gg - pp$, on aura donc le Quarré de la plus grande, moins le Quarré de la petite.

32. Le Quarré de $gp = ggpp$. Or $g = \frac{s+d}{2}$, & $p = \frac{s-d}{2}$. Donc $g \times p = \frac{ss-dd}{4}$. Donc $ggpp$ $= \frac{s^4 + d^4 - 2ssdd}{16}$, ou $\frac{s^4 + d^4}{16} - \frac{ssdd}{8}$.

Digitized by Google

33. Le Produit de deux grandeurs g & p eſt z. Donc $z = gp$. Donc $p = \frac{z}{g}$.

34. $s = g + p = g + \frac{z}{g} = \frac{gg+z}{g}$.

35. Q étant $= gg + pp$, il eſt $= gg + \frac{zz}{gg} = \frac{g^4+2z}{gg}$.

36. Si $g.p :: m.n.gn = pm$, & $g = \frac{pm}{n}$, & $p = \frac{gn}{m}$.

37. $s = g + p = \frac{mp}{n} + \frac{gn}{m}$, ou $g + \frac{gn}{m} = \frac{gm+gn}{m}$, & $g - p = \frac{gm-gn}{m}$.

38. $gp = \frac{ggn}{m}$ ou $= \frac{ppm}{n}$.

39. $Q = gg + pp = gg + \frac{ggnn}{mm} = \frac{ggmm+ggnn}{mm}$ ou $= pp + \frac{ppmm}{nn} = \frac{ppnn+ppmm}{nn}$.

40. $gg - pp = gg - \frac{ggnn}{mm} = \frac{ggmm-ggnn}{mm}$, ou $= \frac{ppmm}{nn} - pp = \frac{ppmm-ppnn}{nn}$.

41. Puiſque $s = g + p$, $sg = gg + gp$. Donc $gg = sg - gp$, on aura $gp = sg - gg$.

Le Quarré d'une des Parties eſt égal au Rectangle ſous la Somme & cette Partie, moins le plan des deux Racines.

42. Puiſque $g = p + d$, $gg = pp + dd$

Digitized by Google

$+ 2pd$, & $gp = p + d \times p = pp + pd$, & $gd = pd + dd$. Donc $gg = pp + dd + 2pd = pp + pd + dd = gp + gd$. On $+ pd$

prouvera de même que $pp = gp - dp$. Le Quarré de la grande Partie eſt égal au Produit de cette Partie par la petite & par la Difference ; & le Quarré de la petite eſt égal au Produit de cette Partie par la grande, moins la Difference.

43. Puiſque $g = \frac{s+d}{2}$, $gg = \frac{sg+dg}{2}$. De même $pp = \frac{sp-dp}{2}$.

44. $g = s - p$. Donc $gg = ss - 2ps + pp$.

45. $g = p + d$. Donc $gg = pp + 2pd + dd$.

46. De même $pp = ss - 2sg + gg = gg - 2gd + dd$.

47. $g \times p = \frac{s+d}{2} \times p = \frac{s+d}{2} \times \frac{s-d}{2}$.

p eſt auſſi $= s - g$. Donc $gp = sg - gg$. Donc $gp = \frac{ss-dd}{4} = sg - gg$; & g étant $= s - p$, $gp = sp - pp$.

On a donc $\frac{ss-dd}{4} = sg - gg = sp - pp$.

Et p étant auſſi $= g - d$, $gp = gg - dg$, on a $\frac{ss-dd}{4} = sg - gg = sp - pp = gg - dg$; à quoi on égalera enfin $pp + dp$, parce que $g = p + d$, d'où il ſuit que $g \times p = pp + dp$.

48. Puiſque $ss = gg + 2gp + pp$, & $Q = gg$

$= gg + pp$; $ss - Q = 2gp$, & $gp = \frac{ss - Q}{2}$, c'eſt-à-dire, le Rectangle de deux Quantitez eſt égal à la moitié du Quarré de leur Somme, moins la moitié de la Somme de leurs Quarrez.

49. $Q = gg + pp$. $ss = gg + pp + 2gp$. Donc $Q = ss - 2gp$.

50. $d = g - p$. Donc $dd = gg - 2gp + pp$. Donc $dd + 2gp = gg + pp = Q$.

51. $s = g + p$. Donc $sp = gp + pp$. Or $d = g - p$. Donc $dg = gg - gp$.

Donc $sp + dg = gp + pp + gg = gg + pp = Q$.
$- gp$

De même $sg = gg + gp$. $d = g - p$. Donc $dp = gp - pp$. Donc $sg - dp = gg + gp + pp = Q$.
$- gp$

Le Rectangle ſous la Somme de deux Quantitez, & ſous la Petite; plus le Rectangle ſous la Difference & ſous la Grande, eſt égal au Quarré de la Grande, & à celui de la Petite; de même que le Rectangle ſous la Somme & la Grande, moins le Produit de la Petite par la Difference.

52. $ss = gg + pp + 2gp$. Donc $\frac{ss}{2} = \frac{gg + pp}{2} + gp$. $d = g - p$. Donc $dd = gg + pp - 2gp$. Donc $\frac{dd}{2} = \frac{gg + pp}{2} - gp$. D. $\frac{ss + dd}{2} = gg + pp + gp = Q$.
$- gp$

53. Puiſque $d = g - p$, & $s = g + p$, on aura $sd = gg - pp$. Si donc on fait $gg - pp = DD$, on aura $sd = DD$; le Rectangle ſous la Somme & la Difference égal à la Difference des Quarrez.

54. Puiſque $d = 2g - s$ (19) sd ſera $= 2gs - ss$, donc $DD = 2gs - ss$; & puiſque $s = 2p + d$, & $d = s - 2p$, sd ſera $= ss - 2ps = DD$, &

Digitized by Google

on aura $2gs - ss = ss - 2ps$. Donc $2ss = 2gs + 2ps$, & $ss = gs + ps$, & $s = g + p$.

55. $d = g - p$. Donc $dg = gg - gp$, & $2dg = 2gg - 2gp$. De plus, $dd = gg + pp - 2gp$. D. $2dg - dd = 2gg - 2gp - pp = gg - pp = DD$.
$- gg + 2gp$

56. Puiſque $DD = sd$ (53) & que $d = g - p$, $DD = sg - sp$. Or $s = g + p$. Donc $s \times d = DD = dg + dp$.

57. $sg = gg + gp$. $dp = gp - pp$. Donc $sg + dp = gg + gp - pp$. Or $DD = gg - pp$.
$+ gp$

$gg - pp = gg + 2gp - pp - 2gp$. Donc $DD = sg + dp - 2gp$.

58. On prouvera de même, que $DD = dg + 2gp - sp$.

59. $d = g - p$. $dd = gg + pp - 2gp$. $s = g + p$. $ss = gg + pp + 2gp$.

Or $gg + pp + 2gp = gg + pp - 2gp + 4gp$. Donc $ss = dd + 4gp$, & $dd = ss - 4gp$.

60. L'Analyſe a toûjours en vûë de manifeſter l'Inconnu par le moïen de ſes relations avec le Connu ; on donne donc aux Quantitez inconnuës, autant qu'on peut, des noms tirez des relations qu'elles ont avec les Connuës, & ces noms en ſont comme les Définitions.

Vous diriez que les choſes viennent ſe preſenter d'elles-mêmes à l'eſprit dès qu'on les a deſignées par des noms qui leur conviennent.

Afin que les comparaiſons du Connu avec l'Inconnu, ſervent à le manifeſter, on a ſoin d'aſſembler tout le Connu d'un côté, & de jetter tout l'Inconnu de l'autre.

Antitheſe. 61. Quand on a pluſieurs Quantitez à la gauche qui forment une ſomme égale à pluſieurs autres Quantitez placées à la droite, pour faire paſ-

Digitized by Google

ſer les Inconnuës de la droite à la gauche, & les Connuës de la gauche à la droite, ſans troubler cette égalité de Valeurs, entre les deux Membres de la droite & de la gauche ; ce qui ſe trouve d'un côté ſous le Signe +, on le tranſporte de l'autre ſous le Signe —, & reciproquement ce qui eſt d'un côté ſous le Signe —, on le fait paſſer de l'autre ſous le Signe +.

Cette Méthode d'operer s'appelle *Antitheſe*, & elle eſt fondée ſur ce Principe : *Si à deux aſſemblages égaux on ajoûte des Quantitez égales, les nouvelles Sommes qui naîtront ſeront auſſi égales ; & ſi de deux aſſemblages égaux on ſouſtrait de chacun des Quantitez égales, les Reſidus demeureront égaux.* Or, inſerer une certaine Quantité avec le Signe + dans le Membre où elle ſe trouve ſous le Signe —, c'eſt la faire évanoüir dans ce Membre, comme reciproquement l'inſerer avec le Signe —, là où elle ſe trouve déja avec le Signe +, c'eſt de même la faire évanoüir. Ainſi, ſoit par Addition, ſoit par Souſtraction dans le Membre où elle ſe trouve on l'efface, & dans l'autre on la place, ce qui la fait paroître paſſer d'un Membre à l'autre ſous des Signes contraires.

62. Lorſque les *Fractions* embaraſſent dans un des Membres de la Comparaiſon, ou de l'Equation, pour les faire évanoüir ſans troubler l'égalité, il n'y a qu'à multiplier tous les Membres, ou toutes les Quantitez qui compoſent chaque Membre par le Denominateur de cette Fraction, & alors la Fraction ſe trouvera changée en un Entier, en effaçant le Denominateur ; car $\frac{b}{c} * c = \frac{bc}{c} = b$, l'égalité n'eſt point troublée, parce Iſomerie.

que quand deux aſſemblages égaux ſont également multipliez, il en reſulte des Produits égaux.

Si dans un Membre il y a pluſieurs Fractions, il faut les aſſembler en une avant que de faire cette Operation.

Lorſque toutes les Quantitez qui compoſent les deux Membres d'une Equation, ſont des Fractions réduites aux mêmes Denominateurs, on peut négliger les Denominateurs, & comparer les ſeuls Numerateurs, car c'eſt comme ſi on multiplioit chaque Quantité par le même Nombre, ce qui donneroit des Produits égaux.

63. Quand les Puiſſances ſe trouvent mêlées avec les Fractions, l'on peut operer comme à l'ordinaire, & multiplier les Puiſſances par le Denominateur de la Fraction; ainſi quand j'ai $xx + 7\frac{1}{2}x = 20$, je puis en multipliant chaque Terme par le Denominateur 2, faire $2xx + 7\frac{1}{2} \times 2 = 2xx + 15x = 40$.

Mais comme $2xx$ ne peuvent pas être un vrai Quarré, & que dans telles Equations, comme nous verrons dans la ſuite, il eſt important que la premiere Quantité inconnuë ſoit une vraie Puiſſance, afin de laiſſer xx ſeul, comme j'ai doublé $7\frac{1}{2}$, pour en faire 15, il faut auſſi ſuppoſer que la Racine x vaut le double de ce qu'elle valloit dans la precedente Equation; c'eſt-à-dire, que pour mettre xx à la place de $2x$, je ſuppoſe que dans la ſeconde Equation x vaut $2x$ de la premiere; par conſequent xx dans la ſeconde vaudra $4xx$ de la premiere. Alors le Produit $15x$, compoſé de 15 (double de $7\frac{1}{2}$) & de la ſeconde x,

double de la premiere, devient par là doublement double, c'eſt-à-dire, quadruple de $7\frac{1}{2}x$ de la premiere x.

Il faudra donc quadrupler tous les Membres, par conſquent il faudra changer 20 en 80, & quant au Quarré xx, formé de la ſeconde x, il ſe trouvera par là quadruple de ce qu'il étoit auparavant; car quand la Racine devient double, le Quarré devient quadruple, j'aurai donc en ce ſens $xx + 15x = 80$.

Si j'avois $4x^4 + 3x^3 + 3xx + 2x = 88$, comme $4x^4$ n'eſt pas une vraie Puiſſance 4e & que je ſouhaite d'avoir ſimplement x^4, je diviſerai ſimplement chaque Membre par 4, & j'aurai $x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}xx + \frac{2}{4}x = \frac{88}{4}$.

Je voudrois maintenant faire évanoüir toutes ces Fractions: ſi dans ce deſſein je multiplie chaque Terme par le Denominateur, je retombe dans le premier inconvenient. Voici donc ce que je fais: je ſuppoſe que la valeur de la Racine x eſt changée, & qu'elle devient quatre fois plus grande; de ſorte que ſon Quarré vaudra ſeize fois plus & ſon Quarré de Quarré x^4, 256 fois plus que xx, ne valoit auparavant.

x^4 dans la ſeconde Equation valant 256 fois plus que dans la premiere, x^4 dans la ſeconde, vaudra 64 fois plus que $4x^4$ dans la premiere. Ainſi en changeant $4x^4$ de la premiere en x^4 de la ſeconde, je multiplie cette premiere Quantité par 64.

Cela étant il faut que je multiplie en telle ſorte: tous les autres Termes, qu'ils vaillent chacun 64 fois ce qu'ils valoient auparavant.

Digitized by Google

Je multiplie donc la Racine $2x$ par 16, & je la change en $32x$, par là le ſecond Produit $32x$ compoſé de 32, 16 fois plus grand que 2, & de la ſeconde x, 4 fois plus grande que la premiere, vaut 4 fois 16 fois plus, c'eſt-à-dire, 64 fois plus qu'auparavant.

Je paſſe à $3xx$: puiſque la Racine x eſt devenuë quatre fois plus grande, le Quarré xx vaut 16 fois plus, & $3xx$ dans la ſeconde Equation, valent 16 fois plus que dans la premiere : or $3xx$ valant déja 16 fois plus ; pour les faire monter à 64 fois plus, il n'y a qu'à les multiplier par 4, & l'on aura $12xx$.

Je viens au Cube $3x^3$, & ici je ne fais point de changement, parce que quand la Racine eſt quadruple, le Cube devient de lui-même 64 fois plus grand.

Enfin, il faut multiplier par 64 le Nombre 8 ſeul dans le Membre de la droite, ce qui étant fait, l'on aura l'Equation $x^4 + 3x^3 + 12xx + 32x = 512$.

J'ai $xx + 3x = 12$. Suppoſons qu'au lieu du Nombre 3 impair qui multiplie la Racine x dans le ſecond Terme, il ſoit plus commode d'avoir un Nombre pair pour multiplier cette Racine, comme en effet cela eſt plus commode, ainſi que nous le verrons dans la ſuite ; je change 3 en 6, & comme en faiſant cela, je double l'une des Racines du Produit, je dois auſſi doubler l'autre, & par là j'ai $6x$, qui devient quadruple de $3x$, quand x ne valoit que la moitié de ce qu'il vaut preſentement. Le ſecond Quarré xx ſe trouvera par là quadruple du premier. Et enfin, après avoir quadruplé les deux Termes de la gauche, il faudra auſſi quadrupler le ſeul Terme de

Digitized by Google

la droite, & l'on aura $xx + 6x = 48$. Cette Operation s'appelle *Iſomerie*.

64. Si l'on diviſe tous les Termes d'une Equation par la même Quantité, l'égalité ſubſiſtera entre les deux Membres; car ſi l'on diviſe deux Sommes égales, chacune par le même Diviſeur, les Quotients ſeront égaux. Paraboliſme.

Il eſt important d'avoir les Puiſſances pures & dégagées des Nombres qui les multiplient; & c'eſt par la Diviſion qu'on les en dégage. Ainſi quand j'aurois $12xx - 66x = 36$, je diviſerois chaque Membre par 12, & j'aurois $xx - \frac{11}{2}x = 3$.

Lorſque la Diviſion fait naître des Fractions, comme dans cet Exemple, on les fait évanoüir par l'*Iſomerie* de l'Article précedent, & par là je trouverois $xx - 11x = 12$. Cette Operation s'appelle *Paraboliſme*.

65. Comme les Operations ſont d'autant plus aiſées que les Termes ſont plus ſimples, lorſque une Equation eſt compoſée de Puiſſances, on les abaiſſe toutes également. Ainſi je changerois $x^4 + x^3 + xx = 93x$ en $x^4 + xx + x = 93$. Cette Operation s'appelle *Hypobibaſme*. Hypobibaſme.

Quand on a deux Produits égaux, on vient quelquefois à découvrir les Racines qui les compoſent, par le moïen de la Regle de Proportion, que le Produit des Extrêmes eſt égal au Produit des Moïens.

Ainſi quand j'ai $bx = cd$, je ferai $b. c :: d. x$; d'où je conclurai que $x = \frac{cd}{b}$.

Si j'ai $bx + cx = cd$, je ferai $b + c. c :: d. x$; d'où je conclurai que $x = \frac{cd}{b+c}$.

Digitized by Google

Si j'ai $2bx - dx = 2bd - 2gd$, je ferai $2b - d. 2b - 2g :: d. x$.

Puiſque quand les Puiſſances ſont en Proportion, leurs Racines le ſont auſſi, l'on peut ſe ſervir de la même Regle.

Si l'on a $\frac{c^4}{bb}$, l'on fera $b. c :: c. \frac{cc}{b} = d$, & l'on aura $bd = cc$. Par conſequent $bbdd = c^4$, & la Fraction $\frac{c^4}{bb} = \frac{bbdd}{bb} = dd$.

Si l'on a $\frac{c^3b^3}{d^3}$, l'on fera $d. c :: b. \frac{bc}{d} = f$. Par conſequent $df = cb$, & $d^3f^3 = c^3b^3$, & $\frac{c^3b^3}{d^3} = \frac{d^3f^3}{d^3} = f^3$.

Si l'on a $\frac{cbb}{d}$, l'on fera $d. b :: b. \frac{bb}{d} = f$. Par conſequent $df = bb$, & $cbb = cdf$, & la Fraction $\frac{cbb}{d} = \frac{cdf}{d} = cf$.

Et ſi l'on fait $\sqrt{cf} = g$, l'on aura $cf = gg$.

Avertiſſement

66. Il faut ſe faire une grande habitude de ſubſtituer Signe à Signe, & de trouver entre les differentes expreſſions d'une même Grandeur, celles qui marquent le plus diſtinctement ſon rapport à celle avec qui on la compare.

On fera bien de ſe rendre familiers les Theorêmes qu'on vient de voir. Il eſt inutile de travailler juſqu'à l'épuiſement : on n'avance point dès qu'on s'étourdit par l'opiniâtreté au travail ; au contraire, on s'accoûtume à voir confuſément, & à calculer avec précipitation. On ſe rend beaucoup plus familier ce qu'on étudie par petites repriſes. Je ne conſeille à perſonne de s'enfoncer

Digitized by Google

uniquement dans cette étude ; il faut la varier par d'autres, je penſe même que c'eſt un moïen d'y faire plus de progrès, l'étenduë de l'eſprit s'en augmente davantage.

Je vais donner quelques Exemples plus amuſans, & j'y en ajoûterai quelques-uns de plus utiles.

67. Si l'on donne à chacun de ceux qui compoſent une Troupe huit pieces, on en aura trente de reſte ; ſi on vouloit leur en donner dix, il s'en manqueroit douze que l'on en eût aſſez. Combien a-t-on de pieces, & à combien de perſonnes en diſtribuë-t-on ? Ce nombre inconnu de perſonnes je l'exprime par la Lettre x, & puiſque que l'on en donne à chacun huit, la diſtribution ira à $8x$; voila déja deux parties de la Queſtion exprimées. Je continuë, $8x + 30$ exprime la Quantité d'argent que l'on a, c'eſt la 3e condition. La 4e m'engage à nommer $10x$ la ſeconde diſtribution que l'on ne fait pas, mais que l'on voudroit faire. L'argent que l'on a ne va pas à $10x$, il s'en manque 12, je l'exprime donc par $10x - 12$.

Dès là je vois que $8x + 30 = 10x - 12$; car c'eſt la même Somme.

1°. De côté & d'autre, j'ôte $8x$, & j'ai $30 = 2x - 12$. 2°. Je fais paſſer tout le Connu d'un côté, & j'ai $30 + 12 = 2x + 12 = 2x$. -12

3°. En diviſant par 2, j'ai $21 = x$. $21 \times 8 = 168$, $168 + 30 = 198$, $21 \times 10 = 210$, $210 - 12 = 198$.

68. On peut, au lieu des Nombres 8, 10, 30 & 12, ſe ſervir des Lettres a, b, c, d. Alors on aura $x \times a + b = xa + b = xc - d$. Donc

Digitized by Google

$xc - xa = b + d$. Donc $x = \frac{b+d}{c-a}$. La resolution devient par là plus universelle; elle renferme tous les cas, & il n'y a qu'à substituer aux Lettres les Nombres que l'on veut, ici $\frac{b+d}{c-a} = \frac{30+12}{10-8}$

$= \frac{42}{2} = 21 = x$.

69. De deux personnes, l'un dit à l'autre, si vous me donnez a, en le retranchant de ce que vous avez, ce que j'aurai, après cette accession à ce que j'avois, rendra ma Somme, par rapport à la vôtre, comme m est à n. Si je vous donnois b, votre Somme seroit à la mienne, comme p à q, ou la mienne à la vôtre, comme q à p. Il s'agit de déterminer ce qu'ils ont. Ces Sommes inconnuës, je les exprimerai, d'abord la premiere à laquelle a s'ajoûte, par x.

Dès là je fais $m.\ n :: x + a.\ \frac{nx+an}{m}$, c'est ce qui reste au second.

Il avoit auparavant a de plus; il avoit donc $\frac{nx+an}{m} + a = \frac{nx+an+ma}{m}$. Quand il a reçû b, il a $\frac{nx+an+ma+mb}{m}$.

Or $q.\ p :: x - b.\ \frac{nx+an+ma+mb}{m}$.

Donc $px - bp = \frac{qnx+qan+qma+qmb}{m}$,

& $mpx - mbp = qnx + qan + qma + qmb$.
Donc $mpx - qnx = mbp + qan + qma + qmb$,
& $x = \frac{mbp+qma+qmb+qan}{mp-qn}$.

Si $a = 8.\ m = 5.\ n = 3.\ q = 1.\ p = 4.\ b = 12$,

Digitized by Google

on aura $x = \frac{364}{17}$. $x + 8 = x + \frac{136}{17} = \frac{500}{17}$. Ce qui reſte au ſecond après avoir donné 8 au premier, c'eſt $\frac{300}{17}$. Il avoit donc auparavant $\frac{300}{17} + 8$, ſi on ajoûte 12 à $\frac{300}{17} + 20 = \frac{640}{17}$. $x - 12$ ſera $= \frac{364 - 204}{17} = \frac{160}{17} = \frac{1}{4}$ de $\frac{640}{17}$.

Si $m = n$, $\frac{nx + an}{m}$ ſera $= \frac{nx + an}{n} = x + a$.

Si outre cela $a = b$, $\frac{nx + an + ma + mb}{m}$ ſe réduira à $x + a + a + a = x + 3a$, & on aura $x = \frac{ap + 3a}{p - q}$, & ſi $a = 1$. $x = \frac{p + 3q}{p - q}$.

Si $p = 2$, & $q = 1$. $x = \frac{p + 3q}{p - q} = \frac{p + 3q}{1}$ $= 2 + 3 = 5$. $x + 3a = 8$, $x - a = 4$, & $x - a$. $x + 3 :: q$. $p :: 1$. $2 :: 5 - 1$. $5 + 3$.

70. Si on diſtribuë à 12 perſonnes un certain nombre de pieces, il en reſtera 8, mais ſi on vouloit leur en diſtribuer un plus grand nombre, on ſe trouveroit court de 5, quel eſt ce nombre que l'on a ? Ce qu'on donne appellons-le n, & ce qu'on voudroit donner, qui va au-delà, appellons-le m.

$12n + 8$, c'eſt ce que l'on a ; on a auſſi $12m - 5$.

Donc $12n + 8 = 12m - 5$. Donc $12m - 12n = 8 + 5 = 13$. Donc $m - n = \frac{13}{12}$.

Les conditions du Problême ſont executées, & par conſequent il eſt reſolu, pourvû que m

Digitized by Google

ſurpaſſe n de $\frac{13}{12}$. Si je fais $n = \frac{144}{12}$, m ſera $= \frac{157}{12}$. $12n = 144$. $12m = 157$.

On n'a pas de quoi donner $12m$, il s'en manque 5 : on a donc 152.

$12n = 144 = 152 - 8$. Donc $144 + 8 = 152$.

Si $n = \frac{60}{12}$, m ſera $= \frac{73}{12}$, & ce qu'on cherche eſt $\frac{68}{12}$.

Une infinité de Nombres peuvent ſatisfaire à la Queſtion. On appelle les Problêmes de cette nature *Indéterminez*.

71. Il faut trouver deux Quarrez dont la Somme étant ajoûtée au Produit des deux, donne un Quarré parfait.

xx eſt un Quarré, yy un autre; leur Produit eſt $xxyy$: il faut que $xxyy + xx + yy$ ſoit un vrai Quarré.

Je vois d'abord que j'aurai ce que je cherche ſi $xxyy = 2xy$, car $xx + yy + 2xy$ eſt un vrai Quarré : mais $xxyy$ ſera $= 2xy = 1 \times 2xy$, ſi $x = 1$ & $y = 2$.

Alors $xxyy = 4$, $xx = 1$, $yy = 4$: le tout $= 9$. Je vais plus loin, & je dis $xxyy = xy \times xy$, & $2xy = xy \times 2$. Donc $xy = 2$. Dès là je prens pour x ce qu'il me plaît, & diviſant 2 par cette Valeur, j'ai y. Si $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{8}{3}$.

Si $x = 5$, $y = \frac{2}{5}$, on aura donc $xy = 2$, & $xxyy = 4$. On aura $xx = 25$, & $yy = \frac{4}{25}$.

Digitized by Google

Donc $4 + 25 = (29) + \frac{4}{25} = \frac{729}{25} = \frac{27}{5} * \frac{27}{5}$.

Mais pour reſoudre la Queſtion d'une maniere qui s'étende à pluſieurs Cas, & qu'on puiſſe executer avec pluſieurs Nombres, je remarque d'abord, qu'il n'eſt pas extraordinaire que deux Quarrez faſſent une Somme quarrée. Il y en a pluſieurs de tels, ſur tout en Fractions. Cela poſé, je conſidere $xxyy + xx$ comme une Somme quarrée. Je ſçai de plus qu'un Quarré multipliant un autre Quarré, produit un Quarré, & je vois que $xxyy + xx = xx * yy + 1$. Je ſuppoſe donc que $yy + 1$ eſt un Quarré; car, par exemple, ſi $y = \frac{3}{4}$, yy ſera $= \frac{9}{16}$; qu'on y ajoûte $1 = \frac{16}{16}$, on aura $\frac{25}{16} = yy + 1$.

Soit la Racine de $yy + 1 = v - y$, on aura $yy - 2vy + vv = yy + 1$; ce qui donnera $vv - 2vy = 1$. Donc $vv = 1 + 2vy$, & $2vy = vv - 1$, & $y = \frac{vv-1}{2v}$. Donc $v - y = v - \frac{vv+1}{2v} = \frac{2vv-vv+1}{2v} = \frac{vv+1}{2v}$.

Donc $\sqrt{yy+1} = \frac{vv+1}{2v}$. Appellons-la z, on aura $zz = yy + 1$.

$xx * yy + 1$ ſera donc $= xx * zz$. Donc $xxzz = xxyy + xx$, & le Quarré $xxyy + xx + yy = xxzz + yy$. Qu'on ſuppoſe $t - zx = \sqrt{xxzz + yy}$, viſiblement cela dépend de la Valeur de t, qu'on peut ſuppoſer toute telle qu'il eſt neceſſaire pour cet effet. On emploïe les Lettres zx, parce qu'elles ſe trouvent déja

Digitized by Google

dans ce Calcul, & que les Comparaiſons ſe feront plus diſtinctement.

On a donc $tt - 2tzx + zzxx = xxzz + yy$. Donc $tt - 2tzx = yy$. Donc $2tzx = tt - yy$, & $x = \frac{tt-yy}{2tz}$.

Or $y = \frac{vv-1}{2v}$. D. $tt - yy = \frac{4ttvv - v^4 + 2vv - 1}{4vv}$, $z = \frac{vv+1}{2v}$. Donc $2tz = \frac{2tvv+2t}{2v}$.

Je diviſe la Fraction $\frac{4ttvv - v^4 + 2vv - 1}{4vv}$ par $\frac{2tvv+2t}{2v}$, j'aurai $\frac{8ttv^3 - 2v^5 + 4v^3 - 2v}{8tv^4 + 8tvv}$; & en prenant la moitié du Numerateur & du Denominateur $\frac{4ttv^3 - 1v^5 + 2v^3 - 1v}{4tv^4 + 4tvv}$, & en diviſant par v, on aura $\frac{4ttvv - v^4 + 2vv - 1}{4tv^3 + 4tv} = x$.

On ſuppoſe que la Somme $xxyy + xx + yy$, qui preſente les conditions qu'on demande executées ſous des Signes vagues, eſt effectivement un vrai Quarré, & peut ſe trouver tel ſi l'on ſçait choſir les Nombres qu'on doit ſubſtituer aux Lettres x & y.

On ſuppoſe que yy eſt un tel Quarré que ſi on y joint l'Unité, on aura encore un vrai Quarré.

Cela poſé, $xxyy + xx$ devient le Produit d'un Quarré xx, par un Quarré yy. J'exprime la Racine de $yy + 1$, par $v - y$. Telles peuvent être les Valeurs de v & de y que cela ſera poſſible. De cette ſuppoſition, par des conſequences neceſſaires, je conclus que $\sqrt{yy+1} = \frac{vv+1}{2v}$. J'ex-

Digitized by Google

prime $\frac{vv+1}{2v}$ par z, ce qui eſt viſiblement permis, & ſans danger d'erreur. De là je conclus neceſſairement que les Expreſſions $xxyy+xx+yy$, ſont équivalentes à $xxzz+yy$, d'où il ſuit que ces dernieres expriment un Quarré. J'exprime ſa Racine par $t-zx$; ce qui dépend de la Valeur de t, par rapport à z & à x, & cette Valeur on la ſuppoſe telle.

Après cela, en raiſonnant conſequemment aux Rapports des Termes t & v avec y, je trouve une Fraction équivalente à la Valeur neceſſaire dans x, pour faire avec y le Quarré qu'on demande. Si la premiere ſuppoſition eſt vraie y s'exprime juſte par $\frac{vv-1}{2v}$, & x par la Fraction qui vient de terminer le Calcul.

Or quelques Valeurs que je donne à t & v, y ſera toûjours $=\frac{vv-1}{2v}$, & x à la derniere Fraction.

Si $t=2$. $v=3$. $y=\frac{9-1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$, & $x=\frac{144\quad 81+18-1}{216+24}=\frac{80}{240}=\frac{1}{3}$. Dès là $xxyy=\frac{16}{81}$, $xx=\frac{1}{9}=\frac{9}{81}$, & $yy=\frac{16}{9}=\frac{144}{81}$.

Donc le Quarré cherché eſt $\frac{169}{81}$, dont la Racine eſt $\frac{13}{9}$.

Si $t=1$, & $v=2$, on aura $y=\frac{3}{4}$, $yy=\frac{9}{16}$. $x=\frac{7}{40}$, $xx=\frac{49}{1600}$, $xxyy=\frac{441}{25600}$, & le tout

$= \frac{15625}{25600}$, dont la Racine eſt $\frac{115}{160} = \frac{25}{32}$, dont le Quarré eſt $\frac{625}{1024}$.

Si $t = 4$ & $v = 5$, $x = \frac{259}{520}$, & $y = \frac{12}{5}$, & on aura $\frac{259}{520} \times \frac{259}{520} \times \frac{144}{25} + \frac{259}{520} \times \frac{259}{520} + \frac{144}{25}$.

72. x eſt une Grandeur Inconnuë. Son Quarré eſt xx; on le multiplie par un Quarré connu & déterminé aa : le Produit eſt $aaxx$. On y ajoûte bx; c'eſt-à-dire, le Plan de x × par la Connuë b. On veut que $aaxx + bx$ ſoit un Quarré. On veut enfin que $aaxx + cx$ ſoit auſſi un Quarré.

On ſuppoſe x tellement qu'on la demande. $aaxx + bx$ eſt donc un Quarré : il a donc une Racine ; cette Racine on l'exprime par $y - ax$. Cela reglera la Valeur de y relativement à x & à a. Par la même raiſon $z - ax$ peut exprimer la Racine du Quarré $aaxx + cx$.

De là il ſuit que $aaxx + bx = yy - 2ayx + aaxx$. Donc $bx = yy - 2ayx$, & $2axy + bx = yy$, & $x = \frac{yy}{2ay + b}$. Quand on fera x tel, on agira conſequemment aux ſuppoſitions, & ſi elles ſont vraies, ſa Valeur ſera bien ainſi énoncée.

De même, j'ai $aaxx + cx = zz - 2axz + aaxx$, & $2axz + cx = zz$, & $x = \frac{zz}{2az + c}$.

J'ai donc $\frac{zz}{2az + c} = \frac{yy}{2ay + b}$.

En multipliant chaque Membre par $2az + c$, j'aurai $zz = \frac{2azyy + cyy}{2ay + b}$.

Dès

Dès là j'ai $zz - \frac{2azyy}{2ay+b} = \frac{cyy}{2ay+b}$.

Je vois en $zz - \frac{2azyy}{2ay+b}$ les deux premiers Termes d'un Quarré, dont z est la premiere Racine, & $\frac{ayy}{2ay+b}$ la seconde. Je quarre celle-ci, & j'ai $zz - \frac{2aayy}{2ay+b} + \frac{aay^4}{4aayy+4aby+bb}$ Quarré égal à $\frac{cyy}{2ay+b} + \frac{aay^4}{4aayy+4aby+bb}$.

Afin de réduire aux mêmes Denominateurs, je multiplie chaque Terme de la premiere Fraction par $2ay+b$,

& j'ai $\frac{2acy^3+bcyy+aay^4}{4aayy+4aby+bb} = zz - \frac{2azyy}{2ay+b}$, &c.

Donc $z - \frac{ayy}{2ay+b} = \sqrt{\frac{2acy^3}{4aayy}}$, &c. $= \frac{\sqrt{2acy^3+bcyy+aay^4}}{2ay+b}$.

Donc $z - \frac{ayy}{2ay+b} = \frac{y\sqrt{aayy+2acy+bc}}{2ay+b}$,

& $z = \frac{ayy+y\sqrt{aayy+2acy+bc}}{2ay+b}$, &c.

Voila donc la Valeur de z. Mais il est essentiel que $aayy+2acy+bc$ soit un vrai Quarré, sans cela la Racine z seroit un Incommensurable.

Je suppose donc $aayy+2acy+bc$ vrai Quarré; je vais en tirer des Consequences qui seront vraies, si cette supposition l'est, & qui étant vraies, rendront reciproquement la supposition veritable.

Soit donc $v - ay = \sqrt{aayy+2acy+bc}$, on aura $vv - 2avy + aayy = aayy$, &c. & $vv - 2avy = 2acy + bc$, & $2acy + 2avy$

$= vv - bc$, & $y = \frac{vv - bc}{2ac + 2av}$.

Une Fraction de cette nature ſera la Valeur qui lui convient. Mais vv doit ſurpaſſer bc, ou v, la $\sqrt{bc}$, afin que y ſoit une Quantité Poſitive.

Soit $a = 1$. $b = 2$. $c = 3$. $v = 4$, on aura $y = \frac{5}{7}$. $yy = \frac{25}{49}$. $x = \frac{yy}{2ay + b} = \frac{25}{49}$, diviſé par $\frac{10}{7} + 2 = \frac{24}{7}$; $\frac{25}{49} * \frac{7}{24} = \frac{175}{1176}$.

$xx = \frac{30625}{1382976}$; $aa = 1$, & $aaxx = xx = \frac{30625}{1382976} = \frac{625}{28224}$.

$bx = \frac{175}{1176} * 2 = \frac{350}{1176} = \frac{8400}{28224}$. Donc $xxaa + bx = \frac{9025}{28224}$, qui eſt un Quarré, dont la Racine eſt $\frac{95}{168}$.

$xxaa + cx = \frac{625}{28224} + \frac{525}{1176}$, & en multipliant les deux Termes de cette derniere Fraction par 24, on aura en tout $\frac{13225}{28224}$, dont la Racine eſt $\frac{115}{168}$.

73. On void par ces Exemples, de quelle importance il eſt de ſçavoir bien choiſir les Signes par où l'on exprime les Quantitez & leurs Rapports, conformément au but qu'on ſe propoſe. Elles ne manquent pas de ſe preſenter, dès qu'on leur donne les noms qui leur conviennent.

74. En voici un Exemple aiſé & commun.

Digitized by Google

Il faut chercher trois Quantitez : elles ſont donc inconnuës, & je les appelle x, y, z. $x+y-z=a$. $x+z-y=b$. $y+z-x=c$. Afin de les mieux comparer, je les range l'une ſous l'autre de cette maniere

$$\begin{aligned} x+y-z &= a \\ x-y+z &= b \\ -x+y+z &= c. \end{aligned}$$

En comparant les deux premieres lignes, j'ai $2x = a+b$, & $x = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

En comparant la ſeconde & la troiſiéme, j'ai $2z = b+c$, & $z = \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$.

En comparant la premiere avec la troiſiéme, j'ai $2y = a+c$, & $y = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c$.

J'ai donc

$$\begin{aligned} x+y-z = {} & \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b \\ & \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}c \\ & -\tfrac{1}{2}b \\ & -\tfrac{1}{2}c \\ \hline & a \end{aligned}$$

Je juſtifierai le reſte de même.

75.
$$\begin{aligned} v+x+y+{}^{*} &= a \\ v+x+{}^{*}+z &= b \\ v+{}^{*}+y+z &= c \\ x+y+z &= d \end{aligned}$$

Donc $3v+3x+3y+3z = a+b+c+d$

Donc $v+x+y+z = \frac{a+b+c+d}{3}$.

Digitized by Google

Or $x+y+z=d$.

Donc $v+x+y+z=\frac{a+b+c+d}{3}$

$-x-y-z=-d$

$v \ * \ * \ *=\frac{a+b+c+d}{3}-d=\frac{a+b+c}{3}-\frac{2d}{3}$

$v+x+y+z=\frac{a+b+c+d}{3}$

$-v \ * -y-z=-c$

$x \ * \ *=\frac{a+b+d}{3}-\frac{2c}{3}$

On trouvera de même $y=\frac{a+c+d}{3}-\frac{2b}{3}$, & $z=\frac{b+c+d}{3}-\frac{2a}{3}$.

Dès là on aura $v+x+y=\frac{a+b+c}{3}-\frac{2d}{3}$

$\frac{a+b+d}{3}-\frac{2c}{3}$

$\frac{a+c+d}{3}-\frac{2b}{3}$

$\frac{3a}{3}=a$.

On justifiera de même le reste, & l'arrangement de ce qu'on vient de voir en presente aux yeux tout l'artifice.

76. On cherche trois Nombres. Je les appelle donc d'abord z, y, x. Mais on veut que $y+\frac{z}{2}+b=x+\frac{y}{3}+c=z+\frac{x}{4}+d$, & enfin l'on veut que $z+y+x=a$

Pour operer avec des Entiers, je fais $z=2v$, $y=3s$, $x=4s$, j'ai donc $3s+v+b=4s+s+c=2v+s+d$.

Digitized by Google

En comparant les deux premieres, j'ai $v = 4s - 2t + c - b$. La premiere avec la troiſiéme, donne $v = 3t - s + b - d$, j'ai donc $4s - 2t + c - b = 3t - s + b - d$. Donc $5t = 5s + c + d - 2b$.

En diviſant par 5, j'ai $t = s + \frac{c + d - 2b}{5}$.

J'ai donc $x = 4s$, $y = 3t = 3s + \frac{3c + 3d - 6b}{5}$, $z = 2v = 4s + \frac{6c - 4d - 2b}{5}$. Donc $x + y + z = a = 11s + \frac{9c - d - 8b}{5}$.

Soit $c = 15$. $d = 10$. $b = 5$. $\frac{9c - d - 8b}{5} = \frac{135 - 10 - 40}{5} = \frac{85}{5} = 17$.

Soit $a = 39$. Donc $39 = 11s + 17$. Donc $11s = 39 - 17 = 22$. Donc $s = 2$. $x = 8$. $y = 6 + 9 = 15$. $z = 8 + \frac{40}{5} = 16$. $x + y + z = a = 39$.

$y + \frac{z}{2} + b = 15 + 8 + 5 = 28$.

$x + \frac{y}{3} + c = 8 + 5 + 15 = 28$.

77. Il s'agit de trouver la Valeur d'une Grandeur x, avec ces conditions. $ax + c$, de même que $bx + d$, doivent être des Quarrez. On le ſuppoſe : on en tire des conſequences, qui, ſervant à leur tour de principe, feront remonter à la Solution du Problême.

On exprime le Quarré $ax + c$ par yy, & le Quarré $bx + d$ par zz.

Dès là on a $ax = yy - c$, & $x = \frac{yy-c}{a}$. On a auſſi $bx = zz - d$, & $x = \frac{zz-d}{b}$. Donc $\frac{yy-c}{a} = \frac{zz-d}{b}$. Donc $byy - bc = azz - ad$; & $yy = \frac{azz+bc-ad}{b}$.

Là zz eſt multiplié par $\frac{a}{b}$, & afin que $\frac{azz}{b}$ ſoit un Quarré, il faut que $\frac{a}{b}$ ſoit un Quarré. J'exprime donc $\frac{a}{b}$ par ff.

Dès là j'ai $\frac{azz+bc-ad}{b} = c + \overline{zz-d} \times \frac{a}{b} = c + \overline{zz-d} \times ff = c + ffzz - ffd$. Cela eſt égal au Quarré yy.

J'exprime ſa Racine par $fz - v$. fz ſe trouve déja dans le Quarré, & il dépendra de la Valeur de v, que $fz - v$ ſoit ce qu'on ſuppoſe.

J'ai donc $yy = c + ffzz - ffd = ffzz - 2fzv + vv$ Donc $2fzv = vv + ffd - c$, & $z = \frac{vv+ffd-c}{2fv}$. Qu'on replace $\frac{a}{b}$, on aura $\frac{vv-c}{2fv} + \frac{d}{2fv} \times \frac{a}{b} = \frac{vv-c}{2fv} + \frac{ad}{2bfv} = \frac{bvv-bc+ad}{2bfv}$. Or puiſque $\frac{a}{b} = ff$, f eſt connuë. z s'exprimant donc par le moïen du Rapport de $bvv - bc + ad$ avec $2bfv$, on donne à v une Valeur arbitraire. Seulement faut-il ſe rendre attentif à une condition, c'eſt que $x = \frac{zz-d}{b}$; d'où il ſuit que zz doit ſurpaſſer d, afin de répondre à la Grandeur

Digitized by Google

x, qui eſt Poſitive, & ainſi z, par conſequent ſon égale $\frac{bvv+ad-bc}{2bfv}$ doit ſurpaſſer la $\sqrt{d}$. Donc $bvv+ad-bc$ doit ſurpaſſer $2bfv\sqrt{d}$; ou autrement, $vv-c+\frac{ad}{b}$ doit ſurpaſſer $2fv\sqrt{d}$. En ajoûtant de côté & d'autre c, on aura $vv+\frac{ad}{b}$, plus grand que $\overline{2fv\sqrt{d}+c}$, & en retranchant de côté & d'autre $\frac{ad}{b}$, on aura vv, plus grand que $\overline{2fv\sqrt{d}+c-\frac{ad}{b}}$.

Soit $a=8$. $b=2$. $c=6$. $d=3$. $v=10$. $\frac{a}{b}=ff=\frac{8}{2}=4$, & $f=2$.

$z=\frac{vv+ffd-c}{2fv}=\frac{100+12-6}{2\times 2\times 10}=\frac{106}{40}=$
$=\frac{53}{20}$, & $zz=\frac{2809}{400}$.

$bx+d=2x+3=zz=\frac{2809}{400}$. Donc $2x=\frac{2809}{400}-3=\frac{2809-1200}{400}=\frac{1609}{400}$. Donc $2x+3=\frac{1609}{400}+3=\frac{2809}{400}$, dont la Racine eſt $\frac{53}{20}$.

$2x=\frac{1609}{400}$. Donc $8x=4\times 2x=\frac{1609}{400}\times 4=\frac{1609}{100}$.

$ax+c=8x+6=\frac{1609}{100}+\frac{600}{100}=\frac{2109}{100}$, dont la Racine eſt $\frac{47}{10}$.

Digitized by Google

78. Je cherche trois Quantitez : je les appelle d'abord z, y, t. Mais comme elles doivent être en Proportion Geometrique continuë, je les exprime par z, y, $\frac{yy}{z}$.

$z+y$ doit être un Quarré, je fais $z+y=xx$. $y+\frac{yy}{z}$ doit auſſi être un Quarré, voila pourquoi je fais encore $y+\frac{yy}{z}=vv$, & $zy+yy=vvz$, j'ai donc $vvz-zy=yy$, & $z=\frac{yy}{vv-y}$.

Et comme $z+y=xx$, j'ai auſſi $z=xx-y$; d'où je conclus que $xx-y=\frac{yy}{vv-y}$. D. $vvxx-vvy-xxy+yy=yy$, & $vvxx-vvy-xxy=0$. Donc $vvxx=vvy+xxy$, & $y=\frac{vvxx}{vv+xx}$.

$z=xx-y$. Il eſt donc $=xx-\frac{vvxx}{vv+xx}=\frac{vvxx+x^4-vvxx}{vv+xx}=\frac{x^4}{vv+xx}$.

$\frac{yy}{z}=\frac{v^4x^4}{v^4+2vvxx+x^4}$, diviſé par $\frac{x^4}{vv+xx}$, ou multiplié par $\frac{vv+xx}{x^4}$;

ce qui donne $\frac{v^6x^4+v^4x^6}{v^4x^4+2vvx^6+x^8}$; & en diviſant chaque Terme par x^4, j'ai $\frac{v^6+v^4xx}{v^4+2vvxx+x^4}$, & en diviſant encore par $vv+xx$, j'ai $\frac{v^4}{vv+xx}$.

J'ai donc $\therefore z.\ y.\ \frac{yy}{z}=\therefore \frac{x^4}{vv+xx}.\ \frac{vvxx}{vv+xx}$,

Digitized by Google

$\frac{v^4}{vv+xx}$, ou $x^4 . vvxx . v^4$.

Si je multiplie chaque Terme par $vv+xx$, je ne changerai point la Valeur des trois Fractions, & j'aurai pour Denominateurs les Quarrez $vv+xx$, & pour Numerateurs $\div\div vvx^4+x^6$. $v^4xx+vvx^4$. v^6+v^4xx.

Soit $x=3$. $v=6$. $vv=36$. $x^4=81$. $x^6=729$. $vvx^4=1296$. $v^4=2916$. $v^4xx=11664$. $v^6=46656$.

$z+y=18225$, a pour ſa Racine 135, & $y+\frac{yy}{z}=72900$, a pour ſa Racine 270.

79. On demande un Nombre, qui étant diviſé par 2, 3, 5, laiſſe toûjours l'Unité & ſe diviſe exactement par 7.

Si je diviſe $2z+1$ par 2, j'aurai pour Quotient $z+\frac{1}{2}$; c'eſt-à-dire, qu'il me reſtera l'Unité. Il m'arrivera la même choſe, ſi je diviſe $3y+1$ par 3, & $5x+1$ par 5.

Mais ſi je diviſe $7v$ par 7, j'aurai pour Quotient v, ſans aucun reſte. Je ſuppoſe donc que le Nombre que je cherche peut s'exprimer de ces quatre manieres, & j'ai égalité entre $2z+1. =3y+1. =5x+1. =7v$.

Je tire de là quatre autres Egalitez $7v-1 =5x=3y=2z$.

Si je diviſe $7v=5x+1$ par 5, j'aurai pour Quotient $x+\frac{1}{5}$. Si je le diviſe par 3, j'aurai pour Quotient $y+\frac{1}{3}$. Si je le diviſe par 2, j'aurai pour

Quotient $z + \frac{1}{2}$. Si je le diviſe par 7, j'aurai v exactement.

S'il pouvoit être diviſé exactement par 2, par 3, par 5, il ſeroit $= 30$ & à ſes *Multiples*; car $2 \times 3 = 6$, & $6 \times 5 = 30$. Donc 30 qui ſe produit par les Multiplications $2 \times 3 \times 5$ ſe diviſera exactement par ces mêmes Racines qui le produiſent. Ainſi $30 = 2z = 3y = 5x$, & $z = 15$. $y = 10$. $x = 6$.

$31 = 2z + 1 = 3y + 1 = 5x + 1$, & par là il remplit les trois premieres conditions, mais il ne remplit pas la derniere, & n'eſt pas diviſible exactement par 7. Il n'eſt donc pas $= 7v$. Pour trouver $7v$, je dis $7v - 1 = 2z = 30$. Donc ſi je diviſe $7v - 1$ par 7, j'aurai $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$. $7v - 1$ eſt donc trop grand de 2. Appellons ſon Quotient $q + \frac{2}{7}$, on aura $7v - 1 = 7q + 2$.

Si on le multiplie par 3, on aura $21v - 3 = 21q + 6$, & ſi on ajoûte 1, on aura $21v - 2 = 21q + 7$, exactement diviſible par 7.

Or $7v - 1 \times 3 = 2z \times 3 = 9y = 15x$ Donc $7v - 1 \times 3$ ſe diviſe exactement par 2, 3, 5. En y ajoûtant 1, on aura $7v - 1 \times 3 + 1 = 6z + 1 = 9y + 1 = 15x + 1$, & toutes les conditions ſeront remplies; car $7v - 1 \times 3 + 1 = 21q + 7$, ſe diviſe exactement par 7, & a pour Quotient $3q + 1$.

Je multiplie 30 par 3, & j'ai $90 = 6z = 9y = 15x = 7v - 1 \times 3$, & en y ajoûtant 1, j'ai 91, qui ſatisfait aux conditions.

Dès là ſi je prens $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, en y

ajoûtant 91, j'aurai 301, qui ſatisfait encore aux quatre conditions. La même choſe arrivera, ſi j'ajoûte 91 aux Multiples de 210.

80. On pourroit pouſſer les Problêmes & les Exemples à l'infini. Ce que je viens de donner ſuffit pour faire comprendre que leur Solution dépend de l'Art avec lequel on impoſe des Noms convenables aux Quantitez, ſoit Connuës ſoit Inconnuës, que l'on compare. Les Noms & les Signes doivent être les mieux choiſis qu'il ſe pourra, pour preſenter toutes ces Quantitez préciſément pour les faces les plus propres à découvrir les Rapports dont on veut pleinement s'inſtruire.

On voit encore que pour choiſir ces Faces, & pour les exprimer juſtes, il eſt abſolument neceſſaire de connoître familierement la nature des choſes ſur leſquelles les Queſtions roulent. Plus on aura d'habitude avec les Nombres, leurs Puiſſances, leurs Proprietez, leurs Combinaiſons, les Rapports qui en reſultent, plus il ſera aiſé de s'aſſurer de la maniere dont il faut s'y prendre pour les comparer avec ſuccès, & pour parvenir au but où l'on tend, par les routes les plus ſûres, les plus naturelles, les plus claires, & les plus abregées.

81. Un Mortier eſt ſucceſſivement poſé ſuivant les Directions AB, AC, AD. La Bombe en ſort avec une telle vigueur de mouvement, que ſi ſa peſanteur ne s'oppoſoit pas à ſon élevation, & ne la forçoit pas à deſcendre, elle coutinuëroit à ſe mouvoir ſuivant ces Directions AB, AC, AD, & s'avanceroit ſur ces Lignes prolongées à des diſtances prodigieuſes; car ce que la rencontre de l'air lui dérobe de ſon mouvement eſt trop peu de choſe à chaque minute, pour empêcher que ce mouvement ne continuë pendant un très-long temps. Fig. II.

Digitized by Google

Mais la peſanteur fait toûjours deſcendre la Bombe, & rabbat toûjours de ſon élevation, ſuivant des meſures égales, dans des temps égaux; meſures, qui, dans des portions correſpondantes d'une certaine durée, croiſſent dans la même proportion. Une Bombe parviendroit en quatre temps égaux de *A* en *B*, ſi ſon mouvement étoit uniforme; mais la peſanteur eſt cauſe qu'il s'en faut une certaine meſure qu'elle ne s'éleve en un temps de la hauteur *D*. Par exemple, elle ne parviendra que vis-à-vis de *F*. Dans le ſecond temps, il s'en faudra trois meſures égales à *DF*, & par conſequent quatre en tout qu'elle ne parvienne à la hauteur *G*; puis il s'en faudra neuf qu'elle ne parvienne en trois temps à la hauteur *K*, & ſeize qu'elle ne parvienne en quatre temps à la hauteur *L*.

Fig. III.

Au bout d'un temps déterminé, il ſe trouvera que la peſanteur l'a fait preciſément autant deſcendre que ce qui lui reſte de force la détermine à s'élever. Dans ce moment, elle ceſſera de monter: au moment ſuivant, elle commencera à deſcendre d'une meſure, puis de trois, puis de cinq, &c. En tout de quatre, de neuf, &c.

Quelque direction que l'on donne au Mortier, la même charge de poudre déterminera la Bombe à décrire, dans des temps égaux, les Lignes *AB*, *AC*, *AD*. Que ce ſoit par exemple en quatre temps, comme ſa peſanteur la fait deſcendre, ou rabbat de ſon élevation *DF*, 4 *DF*, 9 *DF*, 16 *DF*. Au bout de quatre temps, il s'en manquera 16 *DF* que la Bombe ne ſoit à la hauteur *L*; 16 *DF* qu'elle ne ſoit à la hauteur *C*; 16 *DF* qu'elle ne ſoit à la hauteur *D*. Ainſi au bout de quatre temps, ſi elle s'élance ſuivant la direction *AC*, elle ſera plus près de terre que ſi elle s'étoit élancée ſuivant la direction *AB*,

Fig. II.

Fig III.

Digitized by Google

& plus près encore ſi elle étoit partie ſuivant la direction *AD*.

D'un côté donc, moins la Bombe s'éleve, par la direction du Mortier, plus vîte elle arrive à terre, & par conſequent ſe meut moins long-temps dans l'air, & avance moins. Mais auſſi, d'un autre côte, une direction moins élevée, comme *AD*, fait plus avancer la Bombe horiſontalement qu'elle n'avanceroit dans le même eſpace de temps, ſuivant une direction plus élevée, *AC*, ou *AB*.

On void donc en gros qu'il ſe fait des compenſations ; mais on voudroit en ſçavoir le précis & le détail très-exactement, pour s'aſſurer en chaque cas de ce qui en doit reſulter.

Comme la Bombe s'éleve d'autant moins dans le même eſpace de temps, que ſa direction eſt plus éloignée de la Perpendiculaire, on conclud que la ſituation perpendiculaire *AB* ſeroit celle qui porteroit la Bombe le plus haut. On a trouvé moïen de s'aſſurer de cette hauteur : Que la Ligne *AB* ſerve donc à l'exprimer. Du point *C*, milieu de *AB*, on décrit un demi cercle *BDA*. Si je donne au mortier la direction *AE*, il eſt certain que la Bombe en ſort déterminée à parcourir cette Ligne *AE*, & qu'elle ne s'en écarteroit nullement, ſi la peſanteur ne la forçoit de l'abandonner. Fig. IV.

Il eſt certain encore qu'en parcourant *AE* elle s'avance horiſontalement, & s'éleve perpendiculairement, ou que ſon mouvement oblique tient de ces deux. On ne ſçauroit diſconvenir que ſon progrès horizontal ne ſoit à ſon élevation, comme *AF* eſt à la Ligne *FE* perpendiculaire ſur *BA*.

Suppoſons que la Bombe ſorte du Mortier avec une vigueur capable de lui faire parcourir *AE* dans un certain temps ; ſans l'effet de la peſanteur, elle

Digitized by Google

décriroit AG double de AE, dans l'eſpace de deux temps. Suppoſons qu'au bout de deux tels temps la peſanteur ſoit parvenuë juſques à empêcher la Bombe de continuer à s'élever; c'eſt un fait connu & demontré, qu'en ce cas là la Bombe, au lieu de s'élever en deux temps à la hauteur G, ne s'éleve qu'à la hauteur I, en ſorte que $GH = 2HI$.

La Bombe demeure (& doit demeurer; cela ſe démontre) autant de temps à deſcendre comme elle en a emploïé à monter. Elle demeurera donc encore en l'air pendant deux temps. Comme ſon progrès horizontal, pendant les deux premiers, a eſté de la longueur AH, ſa force à cet égard, reſtant toute telle qu'elle étoit, elle avancera de la longueur $HK = AH$; & par conſequent, tombera en K, au bout de quatre temps, dont le premier s'emploïe à la faire parvenir ſur la Ligne EL, vis-à-vis de E & de L. En ce cas là, la Ligne AK, dont l'extremité K marque le point de chute, ſeroit quadruple de AL, ou de FE.

Il s'agit donc de ſçavoir ſi avec une force de la poudre, capable d'élever une Bombe à la hauteur perpendiculaire, repreſentée par la Ligne AB, la Bombe, tirée ſuivant la direction AG, parviendroit vis-à-vis, du point E (où la direction AG coupe le demi-cercle, qui a pour Diametre AB) dans la moitié du temps qu'elle emploïe pour arriver à ſa plus haute élevation, ou dans la quatriéme partie du temps qu'elle demeure en l'air, avant que d'atteindre la Ligne horizontale AK.

C'eſt une verité demontrée, qu'un Corps qui tombe, par ſa peſanteur, de B en A, a acquis au point A une vîteſſe capable de lui faire parcourir $2BA$, d'un mouvement uniforme, dans le temps preciſément que BA vient d'être parcouruë. Or

Digitized by Google

dans le temps qu'un Corps s'éleveroit par une telle vîteſſe uniforme (ni accelerée, ni retardée) de A en M, & parcourroit $AM = 2AB$; il ne fera que la moitié de chemin, en vertu du retardement cauſé par la peſanteur. Par conſequent au lieu de parvenir en M, il n'arrivera qu'en B; & ainſi avec le mouvement acquis par la force de la peſanteur, en deſcendant de B en A, un corps peſant peut remonter de A en B; & reciproquement s'il s'éleve de A en B, il s'y éleve avec une force qui, au commencement & en partant de A, étoit égale à celle que ſa peſanteur lui auroit donné par la chute AB. Cette vîteſſe s'exprime par $\sqrt{AB}$: cela eſt encore demontré. Je l'appellerai pour abreger $\sqrt{a}$.

Le feu de la Bombe jette donc la Bombe hors du Mortier avec cette force $\sqrt{a}$, ſuivant la direction AG. Cette force $\sqrt{a}$ partage ſon efficace en deux ſens : elle ne pouſſe pas uniquement la Bombe horizontalement, & elle ne la pouſſe pas non plus uniquement de bas en haut. Son chemin ſur AE eſt l'effet en partie d'une force qui éleve la Bombe, & en partie d'une force qui la fait avancer horizontalement, & ces deux forces ſont entr'elles comme AF à FE. L'efficace du feu ſe partage en ces deux ſens, à la ſortie du Mortier. Si la peſanteur ne s'oppoſoit pas plus à l'une de ces directions qu'à l'autre, la Bombe parcourroit la Diagonale AE. Mais comme ſa peſanteur fait deſcendre la Bombe, & ne porte aucune atteinte à ſa direction horizontale, elle avancera horizontalement d'une longueur $= FE$, pendant qu'elle ne s'éleve qu'à $\frac{1}{2}AF$, parce que l'un de ces mouvemens demeure uniforme, & que l'autre va toûjours en diminuant en telle ſorte qu'elle ne fait que la moitié du

chemin qu'elle feroit, ſi ſon mouvement demeuroit le même.

Comme donc avec la vîteſſe $\sqrt{a}$, égale à celle que la peſauteur auroit produit par la chute de B en A, la Bombe ſeroit remontée en B, nonobſtant la reſiſtance de la peſanteur, de même avec une force exprimée par $\sqrt{AF}$, & ſemblable à celle qu'auroit produit la chute de F en A, la Bombe peut, malgré ſa peſanteur, s'élever à la hauteur F, ou E.

Appellons 1 le temps pendant lequel la Bombe peut parcourir AE d'un mouvement uniforme, $AG = 2\,AE$, ſe parcourra en deux temps par un tel mouvement, & par là, en deux temps la Bombe parviendroit en G, vis-à-vis de H, en telle ſorte que $AH = 2\,FE$. Ainſi en deux temps la Bombe avance horizontalement de $2\,FE$. Mais en ces deux temps elle ne s'éleve que de la moitié de HG, à cauſe de la proportion avec laquelle la peſanteur empêche que le mouvement de bas en haut ne ſoit uniforme. Elle s'éleve ſeulement à la hauteur I, vis-à-vis de H, en telle ſorte que $HI = \frac{GH}{2} = AF$.

La direction AE étant cauſe que la force de la poudre n'éleve la Bombe que de la hauteur de AF; dès qu'elle ſera parvenuë en I, elle ceſſera de monter; & comme elle demeure autant de temps à deſcendre qu'à monter, en deſcendant elle continuëra à s'avancer horizontalement d'une longueur égale à $AH = 2\,FE$, & par conſequent elle tombera en K, en telle ſorte que AK ſoit $= 4\,FE$.

Si un Corps peſant tombe en deux temps, de F en A, il aura, étant parvenu en A, acquis une force

force, par le moïen de laquelle il pourroit s'élever en un temps, de la hauteur AF, par un mouvement uniforme, & s'y éleveroit effectivement ſans l'effet de la peſanteur. Cette force, c'eſt $\sqrt{AF}$. Appellons-la $\sqrt{f}$. Appellons auſſi FE e, nous aurons comme AF eſt à FE, ou comme f eſt à e; ainſi la force $\sqrt{f}$ qui fait parcourir f eſt à la force qui fait parcourir e, dans le même temps, par un mouvement auſſi uniforme. Or $f.e::\sqrt{f}.\sqrt{x}$ (j'exprime ainſi la force inconnuë que je cherche.) Donc $f\sqrt{x}=e\sqrt{f}$. Donc $\sqrt{x}=\frac{e}{f}\times\sqrt{f}$.

Les Racines étant égales, les Quarrez le ſeront. Donc $x=\frac{ee}{ff}\times f=\frac{eef}{fff}=\frac{ee}{f}$. D. $fx=ee$. Donc $f.e::e.x$. Or $AF(f).FE(e)::FE(e).FB$. Donc $x=FB$, & $\sqrt{x}=\sqrt{FB}$. Ainſi pendant que la force, capable de faire parcourir AF en un temps d'un mouvement uniforme, eſt $\sqrt{AF}$, la force, capable de faire parcourir FE dans le même temps d'un mouvement auſſi uniforme, ſera plus grande que la premiere, & s'exprimera juſte par $\sqrt{BF}$.

De même, $AF=f.AE(m)::\sqrt{f}.\sqrt{y}$. Donc $f\sqrt{y}=m\sqrt{f}$, & $\frac{m}{f}\sqrt{f}=\sqrt{y}$, & $y=\frac{mm}{ff}\times f=\frac{mm}{f}$. Donc $fy=mm$. Donc $f.m::m.y$. Or $AF(f).AE(m)::AE(m).AB$. Donc $y=AB$, & $\sqrt{y}=\sqrt{AB}=\sqrt{a}$; & ainſi pendant qu'une force $\sqrt{a}$ fait décrire AE d'un mouvement uniforme, $\sqrt{f}$ fera décrire AF, & $\sqrt{FB}$ fera décrire FE.

82. On connoît la diſtance AK, & l'on veut

élever le Mortier en telle ſorte que la Bombe tombe préciſément en K.

Dans le Cercle, dont le Diametre AB (a) ſert à repreſenter la force de la poudre par le moïen de $\sqrt{AB}$, ou $\sqrt{a}$, il eſt un Sinus $FE = \frac{AK}{4}$. Appellons-le n : il eſt connu, puiſque $AK = 4n$ eſt connuë. Quand on aura connu la hauteur AF, répondant à FE (n), on aura un Triangle Rectangle, dont les deux jambes ſeront connuës. On connoîtra donc l'Angle FAE & ſon Complement EAK.

FA eſt l'Inconnuë qu'il faut découvrir : je l'appelle x, & j'ai $AB - AF = a - x = FB$.

Dês là j'ai $\sqrt{a-x}.\ \sqrt{x} :: n.\ x$. Donc $n\sqrt{x} = x\sqrt{a-x}$.

Donc $nnx = axx - xxx$. Donc $nn = ax - xx$, & $xx - ax = -nn$.

Donc $xx - ax + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - nn$, & $x - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} - nn}$, & $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - nn}$.

C'eſt la Valeur de la Grande Racine ; celle de la Petite eſt $x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - nn}$.

Dans l'Equation $xx - ax = -nn$, ou $xx - ax + nn = 0$, le Coëfficient a eſt égal à la Somme des deux Racines, ou deux Valeurs de x.

Viſiblement dans le cas preſent on a dans le Demi-cercle BDA deux Sinus FE, OP égaux, & chacun $= \frac{AK}{4}$.

Si je tire la Ligne AP (p), en appellant OP

Digitized by Google

(o), & OA (x), je trouverai $\surd a$ pour faire parcourir p; $\surd x$ pour faire parcourir x ($= OA$) $\surd OP = \surd \overline{a - x}$ pour faire parcourir OP, & en faiſant $\surd \overline{a-x}. \surd x :: o. \gamma$, j'aurai $x \surd \overline{a-x} = o \surd x$.

Dès là $axx - x^3 = oox$, & $ax - xx = oo$, $xx + oo = ax$, & $xx - ax = -oo$; puis comme auparavant $x = \frac{a}{2} \pm \surd \overline{\frac{aa}{4} - oo}$.

Puiſque les Sinus OP, & FE ſont égaux, les Arcs BP, AE ſont égaux. Or $DP = DE$. Donc $DB - BP = DP = DA - EA = DE$. P & E ſont donc à égale diſtance de D, & les Perpendiculaires PO, EF à égale diſtance de la Perpendiculaire DC. Donc $CA - CF = FA = CB - CO = OB$. Donc $OA + AF = OA + OB = AB$, & les deux x ſont égales au Coëfficient a.

De plus, ſi on tire $CE = CB = \frac{a}{2}$, on a $\overline{CE}^2 = \frac{aa}{4}$ & $\overline{CE}^2 - \overline{FE}^2 = \overline{\frac{aa}{4} - nn} = \overline{CF}^2$, & $\surd \overline{\frac{aa}{4} - nn} = CF = CO$. Donc $x = \frac{1}{2} a + \surd \overline{\frac{aa}{4} - nn} = AC + CO = AO$; c'eſt la Grande Racine, & $x = \frac{1}{2} a - \surd \overline{\frac{aa}{4} - nn} = CA - CF = FA$; c'eſt la Petite Racine.

On void que la Direction AE, & la Direction AP, jettent la Bombe également loin, ou ont la même étenduë de jet. Pour chaque étenduë il y a deux élevations également éloignées de l'éle-

vation AD (qui eſt de 45 Degrez) l'une en deſſus, & l'autre en deſſous.

Il en faut excepter l'étenduë de l'élevation AD qui eſt unique; car dans ce cas $CA\,(x) = \frac{a}{2}$, $CD = \frac{a}{2}$, $CB = \frac{a}{2}$. Quand donc je fais $\sqrt{a-x}.\sqrt{x} :: CD.\ x$, c'eſt comme ſi j'écrivois $\sqrt{\frac{a}{2}}.\sqrt{\frac{a}{2}} :: \frac{a}{2}.\ x$, & par là x qui regle l'élevation du Mortier, eſt $\frac{a}{2}$.

Alors l'étenduë du jet eſt $= 4 * \frac{a}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$. C'eſt la plus grande, puiſque le Sinus CD eſt le plus grand de tous.

En effet, la Bombe part du Mortier avec une force capable de l'élever de la hauteur $2a = 2AB$ (en deux temps, par exemple,) par un mouvement uniforme, & toûjours égal à celui du premier moment, ſi la peſanteur ne le dérangeoit point; mais par l'oppoſition de la peſanteur, elle ne pourroit s'élever que juſques en B, quand même ſa Direction ſeroit perpendiculaire, dans cet eſpace de deux temps; mais à cauſe de la direction AD, elle ne s'éleve, en deux temps, qu'à une hauteur, vis-à-vis de D; mais la force horizontale demeurant uniforme, fait avancer pendant ces deux temps, de la longueur de AB, & encore de la même longueur, pendant le temps de ſa chute. L'Algebre, la Geometrie & la Phyſique s'accordent.

Elles s'accordent encore par rapport aux deux directions AE, AP. Dans la direction AP le

Digitized by Google

Mortier eſt plus éloigné de l'Horizon; mais la Bombe monte davantage, & à cauſe de cette montée qui eſt oblique, l'Horizontale OP devient $= FE$.

83. On ſçait que l'air ſoutient 28 pouces de Mercure, & que la force de ſa preſſion eſt équivalente à cette peſanteur. On ſçait que l'air ſe comprime à proportion des poids dont il eſt chargé. $DABC$ eſt un Tuïau recourbé, ouvert en D, fermé en C. Le Vif-argent AB eſt entre l'air interieur BC & l'exterieur. L'air BC eſt dans ſon état naturel, ſoutenant le poids de l'exterieur, équivalant à celui de 28 pouces de Mercure, & il eſt dans le même degré de condenſation que l'air exterieur. Fig. V.

On vuide du Vif-argent dans la branche DA, il en paſſe quelque peu en BC, & quand FD eſt de 28 pouces, l'air CE qui ſoutient ces 28 pouces, & de plus la preſſion ordinaire de l'air, qui par conſequent ſoutient 2×28 pouces, eſt réduit à l'eſpace EC, moitié de BC; c'eſt-à-dire, qu'il eſt le double condenſé, parce qu'il eſt le double chargé. Dans ſon premier état, où il étoit moins condenſé, il cedoit à la preſſion de l'air exterieur, augmentée de celle du Vif-argent qu'on verſoit; mais à meſure qu'il cedoit & ſe retiroit du côté de C, il ſe condenſoit & prenoit des forces, & à la fin il en a aſſez pour ſoutenir un poids $= 2 \times 28$ pouces de Mercure.

J'ai un Tuïau long de 27 pouces, & quand il trempe dans le Mercure d'un Vaſe inferieur, de la longueur d'un pouce, il reſte 26 pouces élevez au-deſſus du niveau du Mercure exterieur. Je remplis ce Tuïau de Mercure, à l'exception de 8 pouces qui demeurent plein d'air, je bouche avec le

Digitized by Google

doigt l'ouverture de ce Tuïau : je le renverſe : je le plonge d'un pouce dans du Mercure. Les 8 pouces d'air montent, & il reſte d'abord 18 pouces de Mercure dans le Tuïau, au-deſſus du niveau du Mercure exterieur.

L'air exterieur ne peut pas faire monter plus haut ces 18 pouces, parce que l'air interieur a autant de condenſation, & par conſequent de force que l'exterieur. Ces deux airs agiſſent l'un contre l'autre; l'interieur pour faire baiſſer le Mercure, l'exterieur pour l'élever : mais la force de l'interieur demeure toute entiere, pendant que celle de l'exterieur ſe trouve affoiblie de la quantité de 18 pouces de Mercure qu'il ſoutient. Il n'agit donc plus avec la force de 28 contre l'air interieur, mais de ces 28, qui eſt ſa force naturelle, ou ſa force dans ſon état ordinaire, il en emploïe 18 pour faire équilibre avec les 18 pouces de Mercure : & pour les ſoutenir; il n'agit donc plus contre l'air interieur qu'avec 10. L'interieur, dont la force eſt 28, preſſé ſeulement de 10, & beaucoup moins qu'à l'ordinaire, ſe dilate donc & fait baiſſer le Mercure. Alors d'un côté l'air interieur s'affoiblit en ſe dilatant, d'un autre l'exterieur ſe fortifie à meſure qu'il a moins de Mercure à ſoutenir; & à la fin la force de l'exterieur, diminuée par le poids du Mercure ſoutenu, ſe trouvera égale à la force de l'interieur diminuée par ſa dilatation. On demande à quelle hauteur le Mercure doit demeurer pour faire naître cet équilibre, ou quelle doit être la dilatation de l'air interieur.

Cette quantité dont il ſe dilate par-deſſus la premiere étenduë 8, je la cherche & je l'appelle x. La plus violente condenſation étoit donc 8, & la moins violente, c'eſt $8 + x$, ou la petite

Digitized by Google

étenduë eſt 8, & la grande $8 + x$. La premiere eſt l'effet d'un poids $=$ 28 pouces de Mercure. La ſeconde eſt l'effet du poids de 28 pouces, diminué du poids du Mercure ſoutenu, ou du Mercure reſtant. Il n'en reſte pas 18 pouces, car il en ſort à proportion que l'air ſe dilate. Il en ſort donc la quantité x, & ce qui reſte, pour être ſoutenu par l'air exterieur, ſe réduit à $18 - x$. Du poids de l'air exterieur il faut donc retrancher $18 - x$, & l'on aura $28 - 18 + x = 10 + x$. C'eſt à ce poids qu'eſt dûë la condenſation $8 + x$. Ainſi l'étenduë $8 + x$ augmente par-deſſus l'étenduë 8 (car les dilatations augmentent à meſure que les condenſations diminuent) à proportion que $10 + x$ eſt foible en comparaiſon de 28, j'ai donc $10 + x$. $28 :: 8. 8 + x$.

Donc $28 \times 8 = 224 = 80 + 10x + xx$, $+ 8x$

& $xx + 18x = 224 - 80 = 144$, & $xx + 18x + 81 = 144 + 81 = 225$, & $x + 9 = \sqrt{225} - 15$, & $x = 15 - 9 = 6$. Le Mercure baiſſe donc de 6 pouces, & s'arrête à 12 pouces, & la grande dilatation eſt de 14 pouces.

La nature du ſujet dont il s'agit fait aſſez voir que x n'a pas deux Valeurs dans cette Equation, car l'étenduë ne peut pas être Négative.

84. Si on demandoit : Je veux qu'il reſte 12 pouces de Mercure, combien faut-il laiſſer d'air pour cela ?

Puiſque le Tuïau eſt élevé de 26 pouces ſur le Niveau du Mercure exterieur, la grande dilatation ſera de 14. Or comme 28 (le grand poids) eſt à $28 - 12 = 16$, (le poids diminué) ainſi 14 (grande dilatation, ou foible condenſation ; car l'air ſe dilate, ou ſe condenſe peu, à propor-

tion que le poids qui le preſſe diminuë) à quoi ?

J'aurai 28. 16 : : 7. 4 : : 14. $\frac{56}{7} = 8$. Les dilatations ſuivent le rapport de 7 à 4, ou de 4 à 7, & quand je cherche la moindre, il faut que 7 precede 4 dans la Proportion.

85. Appellons le poids de l'air exterieur & libre dans ſon état preſent quelconque p, l'air qu'on laiſſe a, le Mercure verſé dans le Tuïau m, on aura $m - x$ pour ce qui y reſte après que l'air s'eſt dilaté.

Le poids p eſt donc diminué de $m - x$, & il eſt $p - m + x$. Appellons $p - m$, c, on aura $c + x$. $p : : a. a + x$, & $pa = ca + cx + xx$. Soit $+ax$

$c + a = d$, on aura $xx + dx = pa - ca$, & $x = \sqrt{pa - ca + \frac{1}{4}dd} - \frac{d}{2}$.

Soit $p = 27$. $a = 12$. $m = 24$. $p - m$ ſera $3 = c$. $d = c + a = 3 + 12 = 15$.

$pa = 324$, $-ca = 36$, 288 $\Big\} = 288$. $pa - ca + \frac{dd}{4} = 288 + \frac{225}{4} = \frac{1377}{4}$,

[& $x = \sqrt{\frac{1377}{4}} - \frac{15}{2}$.

Si j'avois $\frac{1369}{4}$, x ſeroit $= \frac{49}{2} - \frac{15}{2} = \frac{34}{2} = 17$. La dilatation ſeroit de $12 + 17 = 29$, & le Mercure reſteroit à la hauteur $24 - 17 = 7$. La dilatation de l'air eſt tant ſoit peu plus grande, & la hauteur du Mercure tant ſoit peu moindre.

Il s'agit de pouces. Que l'on conçoive un Rectangle, dont un côté ſoit de 27 pouces, & l'autre de 51. Ce Rectangle renfermera 1377 pouces quarrez. Entre les deux côtez, que l'on trouve une Ligne Moïenne Proportionnelle, cette Ligne

Digitized by Google

ſera la Racine d'un Quarré équivalent à 1377 pouces quarrez. De ce côté il en faudra prendre la moitié, & on aura $\sqrt{\frac{1377}{4}}$, d'où l'on retranchera 15 demi-pouces, & le reſte ſera la longueur x que l'on cherche.

On veut qu'il reſte dans le Tuïau 24 pouces de Mercure $-\frac{15}{2}-\sqrt{\frac{1377}{4}}$. La longueur du Tuïau eſt connuë, & par là on ſçait que la grande dilatation de l'air, ſera $12+\sqrt{\frac{1377}{4}}-\frac{15}{2}=\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{1377}{4}}$ La force qui reſte à l'air exterieur, ſera $27-24+\sqrt{\frac{1377}{4}}-\frac{15}{2}=\sqrt{\frac{1377}{4}}-\frac{9}{2}$.

On aura donc $27.\sqrt{\frac{1377}{4}}-\frac{9}{2}::\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{1377}{4}}$.

A quoi & on trouvera $\frac{1377}{4}-\frac{81}{4}=\frac{1296}{4}=\frac{324}{27}=12$.

Si $p=28$, $p-m$ ſera $4=c$. $c+a=d=16$. $pa=336$. $ca=48$. $pa-ca=288$, & $x=\sqrt{pa-ca+\frac{dd}{4}}-\frac{d}{2}=\sqrt{288+64}-8=\sqrt{352}-8$.

Qu'on prenne une Ligne Moïenne Proportionnelle entre 32 & 11 pouces; qu'on en ôte 8 pouces, ce ſera la longueur x que l'on cherche.

86. On ſuppoſe une Boule dont le Diametre eſt très-petit, & que lon nomme a, parce qu'il eſt déterminé. Cette Boule eſt un Corps parfaitement ſolide; & ſon Diametre étant a, ſa Solidité eſt a^3. On veut que la matiere qui compoſe cette Boule ſerve d'enveloppe à un Globe creux, d'un

Digitized by Google

Diametre très-grand, & comme immenſe en comparaiſon du Diametre a. La diviſibilité de la matiere, qui eſt ſans dernier Terme, permet cette expoſition. Que le Diametre de ce ſecond Globe ſoit $2b$, ſon Raïon ſera b; & s'étendra dès le centre juſqu'à la convexité du Globe, où il ſe terminera en faiſant un des points de ſa Surface. J'appelle le Raïon de la concavité x, d'où il ſuit que l'épaiſſeur de l'Enveloppe ſera $b - x$.

J'exprime le rapport de la Circonference au Raïon par $\frac{c}{r}$, parce que le Globe étant d'une grandeur prodigieuſe : cette proportion évaluée en nombre ſeroit trop éloignée de l'exactitude.

$\frac{c}{r} \times b^3$ exprimera donc l'étenduë d'un Cylindre circonſcrit à la grande Sphere, dont le Raïon eſt b; & cette Sphere ſera $\frac{2}{3} \times \frac{c}{r} \times b^3 = \frac{2cb^3}{3r}$; & le creux de cette Sphere, qui a pour Rayon x, ſera $\frac{2cx^3}{3r}$. Or $\frac{2cb^3}{3r} - \frac{2cx^3}{3r} = \frac{2c}{3r} \times \overline{b^3 - x^3}$; c'eſt la Quantité de l'Enveloppe, dont la matiere $= a^3$

De là je conclus que $3ra^3 = 2c \times \overline{b^3 - x^3}$; & que $\frac{3ra^3}{2c} = b^3 - x^3$.

Donc $x^3 = b^3 - \frac{3ra^3}{2c}$.

Donc $x = \sqrt[3]{b^3 - \frac{3ra^3}{2c}}$. Donc $b - x$ (épaiſſeur de l'Enveloppe) $= b - \sqrt[3]{b^3 - \frac{3ra^3}{2c}}$.

Cette épaiſſeur eſt réelle & non pas imaginaire, & s'exprime par des Signes réels & juſtes.

87. On deſigne une Ligne L prodigieuſement

Digitized by Google

grande ; ſon Cube ſera L^3. On détermine une autre Ligne a, dont le Cube eſt a^3. On diviſe la Ligne L en parties égales ; chacune a a : leur Nombre s'exprime par n ; & ainſi $na = L$, & $n^3a^3 = L^3$; & le vaſte Cube L^3 contient autant de petits Cubes a^3 qu'il y a d'Unitez en n^3.

Suppoſons enſuite un très-petit Bloc ſolide b^3, partagé en autant de parties ſolides qu'il y a d'Unitez en n^3. $\frac{b^3}{n^3}$ ſera une de ces parties. Appellons-là m^3 ; avec le Solide m^3, qu'on faſſe une petite Boule creuſe, dont le Diametre ſoit a. Alors le vaſte & prodigieux eſpace cubique L^3 ſe trouvera rempli de Boules qui ſe toucheront, dont le Diametre ſera a, & par conſequent les pores des parties en nombre prodigieux, qui rempliront la capacité L^3 : ces pores ſeront auſſi petits que l'on voudra ; & toute la matiere qui enveloppe ces pores pourra ſe reduire à un auſſi petit volume ſolide qu'on trouvera à propos de ſuppoſer.

88. Si ſur une Ligne droite partagée en parties égales, on éleve des Perpendiculaires égales, la Ligne qui en joindra les Sommets ſera droite & parallele à la Ligne inferieure.

Si ces Perpendiculaires croiſſent de la même quantité, chacune ſur ſa precedente, la Ligne qui en joindra les Sommets ſera encore une Ligne droite, mais poſée obliquement.

Si ces Perpendiculaires croiſſent ou diminuent dans une autre proportion, la Ligne qui paſſera ſur leurs extremitez ſuperieures ſera une Ligne courbe ; & il en eſt d'un très-grand nombre de genres, ſuivant les differentes proportions ſelon leſquelles ces Perpendiculaires croiſſent.

On ſçait que dans un Cercle le Rectangle, ſous

Digitized by Google

Fig. I. AB & BC (les deux parties du Diametre) = au Quarré de la Perpendiculaire BD.

Si on appelle AB (x.) le Diametre a, BC ſera $= a - x$; & $AB \times BC$ ſera $= x \times a - x = ax - xx$.

Si on partage le Diametre a en pluſieurs parties égales, & que ſur chaque diviſion on éleve une Perpendiculaire; à chaque Rectangle, ſous les deux parties du Diametre répondra le Quarré d'une Perpendiculaire. On exprime ces Perpendiculaires par y; & dès là à chaque $ax - xx$, répond ſon yy. On appelle les x des *Coupées*, & les y des *Appliquées*, ou *Ordonnées*.

La ſeconde Coupée eſt double de la premiere. La troiſiéme triple, & ainſi de ſuite en Progreſſion Arithmetique.

Si on multiplie x par $a - x$, on aura un Rectangle qui renfermera autant de Quarrez de cette premiere x, que cette x ſe trouve de fois dans la longueur moins une. Mais ſi on multiplie la ſeconde x (double de la premiere) par $a -$ cette ſeconde x, on aura autant de fois le double quarré de la premiere x, qu'elle ſe trouve de fois dans a moins deux fois.

Par là, il eſt manifeſte que les $ax - xx$, ou les $x \times a - x$ croiſſent; & par conſequent les yy & leurs Racines y.

Cependant dès qu'on aura une $x = a$, $ax - xx$ ſera $= aa - aa = 0$; & par conſequent auſſi l'Appliquée $y = 0$; c'eſt-à-dire que au point où $x = a$, il n'y a plus de y, & que la Courbe a atteint l'extremité de a. Après donc être partie d'un des bouts, elle retombe ſur l'autre; & par conſequent les y croiſſent, puis décroiſſent, & ſe réduiſent à rien.

Digitized by Google

De plus, quand une x eſt $= c$, le reſte du Diametre a eſt $= a - c$, & le Produit $= yy$ eſt $c \times a - c$. Mais quand une Coupée x eſt égale au Diametre a, moins la longueur c, cette Coupée eſt $a - c$, & le reſte du Diametre c. Donc en ce cas encore yy eſt $= c \times a - c$. Ainſi en coupant des x égales, de la gauche à la droite, & de la droite à la gauche, on a toûjours deux y égales à la même diſtance des extremitez du Diametre, & par conſequent à égale diſtance du centre.

89. Mais qu'on partage une autre Ligne b en parties égales, ou en x, qui croiſſent également; qu'on détermine une autre Ligne p, & que ſur chaque diviſion on éleve une Perpendiculaire y, telle que chaque px ſoit $=$ à ſon yy correſpondante. La Courbe qui razera les Sommets de ces y ſera une *Parabole*.

Chaque x étant multipliée par la même Ligne p, & chaque x croiſſant, les px, & par conſequent les $yy = px$, & leurs Racines y croiſſent continuellement; & ainſi la Parabole s'éloigne toûjours plus de la Ligne droite b qu'on appelle ſon Axe; elle n'y revient jamais, & elle ne ſçauroit fermer un eſpace. $px = yy$

$$ax - xx = yy$$

Donc lorſque ſur un Axe une Perpendiculaire y eſt élevée d'une telle longueur que ſon Quarré eſt $= \begin{cases} px \\ ax - xx \end{cases}$, l'extremité ſuperieure de cette y appartient à un Cercle & à une Parabole; & en ce cas, $px \times ax - xx = apxx - px^3 = y^4$; & cette Equation, ou celle-ci, $y^4 + px^3 - apxx = 0$, exprime le concours de la Parabole & du Cercle.

Preſentement pour découvrir ſur quel point de

Digitized by Google

l'Axe une telle y doit s'élever ; je dis en ce cas, $ax - xx = px$. Donc $a - x = p$; & $a = p + x$. Cette Ligne p, qu'on appelle le Parametre de la Parabole, étant appliquée ſur le Diametre a, la longueur dont le Diametre ſurpaſſera p ſera la longueur de la Coupée x, ſur laquelle on devra élever l'Ordonnée y, qui appartiendra au Cercle & à la Parabole.

Si $p = \frac{a}{2}$, x difference de p & de a ſera auſſi $= \frac{a}{2}$; & en ce cas l'Ordonnée commune s'élevera ſur le centre du Cercle.

Plus p ſera plus petit que $\frac{1}{2}a$, plus la Coupée x s'étendra au-delà du centre ; & en ces cas là, la Parabole s'élevera toûjours moins ſur ſon Axe.

Au contraire, plus p ſurpaſſera $\frac{1}{2}a$, plus la Coupée x ſera petite ; & en ces cas là, la Parabole coupera le Cercle plus près de ſon origine, en ſortira plûtôt, & par conſequent s'élevera davantage au-deſſus de ſon Axe.

Si $p = a$, x leur Difference ſera nulle : il n'y aura donc aucune y qui leur ſoit commune ; car p étant $= a$, px ſeroit toûjours plus grand que $ax - xx$, & par conſequent $yy = px$, ne ſeroit pas égal à $yy = ax - xx$. Les y d'une telle Parabole ſont toûjours plus grands que celles du Cercle, & par conſequent une telle Parabole s'ouvre dès ſon origine, plus que le Cercle, & elle le renferme. Pour la faire couper par un Cercle, il en faut choiſir un d'un Diametre plus grand, & qui renferme auſſi le premier.

90. Si on partage une Ligne c en parties éga-

Digitized by Google

les, ou en Coupées x qui croiſſent également, & que ſur chaque diviſion on éleve des Perpendiculaires y, telles que $yy \times \frac{c}{p} = cx - xx$. La Courbe qui razera les Sommets de ces y, s'appelle *Ellipſe*. La Ligne p s'appelle *Parametre*. $yy \times \frac{c}{p} = \frac{yy}{p} \times c$. $\frac{yy}{p}$ eſt une Ligne droite; car ſi je fais $p.y::y.v$, v ſera $= \frac{yy}{p}$. $pv = yy$, le Rectangle pv diviſé par ſon côté p, donne pour Quotient l'autre côté v. Donc $yy = pv$ diviſé par $p = v$; ce $v = \frac{yy}{p}$, on le multipliera par c, & on aura $cv = \frac{yy}{p} \times c = \frac{cyy}{p} = \frac{c}{p} yy = cx - xx$. Dès là on aura $cyy = pcx - pxx$.

Si du milieu de c, on prend de côté & d'autre $\frac{1}{2} a$, & que la Ligne a devienne un Diametre aſſez grand pour ſoutenir un Demi-cercle qui ſorte de l'Ellipſe, ſur a on élevera des Ordonnées y, & afin qu'une telle Ordonnée du Cercle ſoit commune à l'Ellipſe, il faut que $yy = \begin{cases} ax - xx \\ \frac{pcx - pxx}{c} \end{cases}$

ou $cyy = \begin{cases} cax - cxx \\ pcx - pxx \end{cases}$

Mais en ce cas les x du Cercle & celles de l'Ellipſe ne partent pas du même point, ou n'ont pas la même origine, & celles de l'Ellipſe ſont plus longues.

Que de l'origine de l'Ellipſe à l'origine du Cer-

Digitized by Google

cle il y ait la longueur e; une Coupée de l'Ellipſe ſera $e+x$, lorſqu'une Coupée du Cercle ne ſera que x, au cas qu'elles aboutiſſent au même point de l'Axe c, qui, en ce cas eſt $= e+a+e$.

Cela poſé dans l'Equation $cyy = pcx - pxx$, ſi je mets $e+x$ à la place de x, afin que la Ligne x ne ſignifie pas plus dans l'Ellipſe que dans le Cercle, j'aurai $cyy = pce+pcx-pee-2pex-pxx = cax-cxx$,

& dès là $\left.\begin{matrix} cxx+pcx \\ -pxx-2pex \\ -cax \end{matrix}\right\} = pee-pce.$

Soit fait $c-p=f$, on aura $cxx-pxx = fxx$.

Soit $\frac{pc-2pe-ca}{f} = -g$, on aura $fxx-gx = pee-pce$, & $xx-gx = \frac{pee-pce}{f}$, & $x = +\frac{g}{2} \pm \sqrt{\frac{pee-pce}{f}+\frac{gg}{4}}$.

Il y a deux Valeurs de x; car le demi Cercle coupera en deux endroits la demi Ellipſe.

Si j'ai $pc-pe = ph$, pour avoir $\frac{ph}{f}$, je ferai $f.p::h.k$. Donc $\frac{pc-pe}{f} = k$, & $\frac{pe-pc}{f} = -k$. Donc $\frac{pe-pe}{f} \times e = -ek$.

Soit $\frac{gg}{4} - ek = mm - ek$. Je fais $m.k::e.n$. Donc $mm-ek = mm-mn$. Soit $m-n=o$. Donc $mm-ek = mm-mn = mo$. Soit $m.q::q.o$. Donc $qq = mo$.

Et

Et $q = \sqrt{\frac{pee - pce}{f} + \frac{qq}{4}}$, & $x = \frac{1}{2}g + q$.

91. Un plus grand détail demanderoit une connoiſſance plus exacte, & plus étenduë des Lignes Courbes, que je n'en ſuppoſe à ceux qui étudient les Elemens de l'Algebre : j'ai ſimplement voulu leur en donner quelque idée de ſon application aux Courbes, & de l'uſage qu'on en fait dans leur Theorie, & je les ai choiſi des plus faciles & des moins compoſez.

92. Si l'on veut s'exercer à l'Analyſe, & en prendre l'habitude, & que l'on ſe trouve un grand goût pour les Calculs Algebriques, on peut lire Diophante, & comparer ſes Solutions avec celles du P. Preſter ; ou ſi l'on veut s'avancer en même temps dans la connoiſſance des Courbes, on lira les Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital. Mais on ne feroit pas mal de lire auparavant l'Application de l'Algebre à la Geometrie, par M. Guinée.

J'ajoûterai encore ici quelques Exemples, tant ſimples, que compoſez, reſolus avec un peu d'étenduë.

93. $\frac{22 - 5x}{2 + 3x} + \frac{9}{2} = 6$. Donc $\frac{22 - 5x}{2 + 3x} = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$. Donc $22 - 5x = \frac{6 + 9x}{2}$. Donc $44 - 10x = 6 + 9x$. Donc $38 = 19x$, & $x = \frac{8}{19} = 2$, & $\frac{22 - 10}{2 + 6} + \frac{9}{2} = \frac{12}{8} + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 6$.

Digitized by Google

94. $v+x+y-z=a$
$v+x+z-y=b$
$v+y+z-x=c$
$x+y+z-v=d$

Donc $v=a-x-y+z$. Je mets cette Valeur v dans la ligne ſuivante, & j'ai $\left.\begin{matrix}a-x-y+z\\+x-y+z\end{matrix}\right\}=b.$

Je mets encore la Valeur de v dans la troiſiéme ligne, & j'ai $\left.\begin{matrix}a-x-y+z\\-x+y+z\end{matrix}\right\}=c.$

Je la ſubſtituë dans la quatriéme, & j'ai $\left.\begin{matrix}x+y+z\\-a+x+y+z\end{matrix}\right\}=d.$

Je joints ces trois Sommes, & j'ai $\left.\begin{matrix}2z-2y+a=b\\2z-2x+d=c\\2x+2y-a=d\end{matrix}\right\}$ J'en fais la Somme,

& j'ai $4z=b+c+d-a$, & $z=\frac{b+c+d-a}{4}$.

J'opere avec x, comme j'ai fait avec v, & j'ai $x=d+v-y-z$. Je mets cette Valeur dans les trois autres lignes,

& j'ai $\left.\begin{matrix}v+y-z\\+v-y-z\end{matrix}\right\}+d=a.$ $\left.\begin{matrix}v+z-y\\+v-z-y\end{matrix}\right\}+d=b,$

& $\left.\begin{matrix}v+y+z\\-v+y+z\end{matrix}\right\}-d=c.$

Donc $2v-2z+d=a$
$2v-2y+d=b$
$2z+2y-d=c$

Donc $4v=a+b+c-d$,

& $v=\frac{a+b+c-d}{4}$.

Je connois v & z; la même Méthode ne me

réüſſiroit pas ſur y : j'en prens un autre.

J'ai $\left\{\begin{matrix} y = a - x - v + z \\ y = c + x - v - z \end{matrix}\right\}$ Donc $2y = a + c - 2v$, & $y = \frac{a+c}{2} - v = \frac{a+c}{2} - \frac{a-b-c+d}{4} = \frac{2a+2c-a-b-c+d}{4} = \frac{a+c+d-b}{4}$.

Dès là $x = a + z - v - y$ eſt égale à des Connuës.

On peut aſſigner de telles Valeurs aux Quantitez a, b, c, d, que les Valeurs de quelques-unes des Inconnuës pourront devenir Négatives. Mais la Queſtion ne laiſſera pas d'être bien reſoluë, parce qu'elle roule ſur des rapports, & que les Négatives ont entre elles, & avec les Poſitives des rapports très-réels & très déterminez.

95. On demande deux Nombres, dont le Produit, plus la Somme ſoit $= 48$.

Ici il n'y a pas des rapports entre les deux Grandeurs inconnuës qui puiſſent donner lieu à les exprimer par une ſeule lettre. Je fais donc $x + y + xy = b$. (A la place de 48, je mets b pour rendre la Solution plus univerſelle.)

Je mets les x d'un ſeul côté, & j'ai $x + xy = b - y$. Pour avoir x ſeule, je diviſe par $y + 1$, & j'ai $x = \frac{xy+x}{y+1} = \frac{b-y}{y+1}$.

J'ai rempli toutes les conditions. Il ne me reſte plus qu'à choiſir une Quantité y, & après avoir fait $\frac{b-y}{y+1}$, je lui égalerai l'autre Quantité x; car moïennant que cela ſoit, j'aurai $\frac{b-y}{y+1} = x$. D. $b - y = xy + x$. Donc $b = xy + x + y$. Si

$y = 12$, j'aurai $\frac{b-12}{13} = x$, & $\frac{b-12}{13} \times 12 =$
$= \frac{12b-144}{13} + 12 + \frac{b-12}{13} = b = \frac{13b-144-12+156}{13}$
$= \frac{13b}{13} = b$.

96. On demande deux Nombres tels que leur Produit ſoit à leur Difference, comme b à c, on aura $xy. x-y :: b. c$. Donc $bx-by = cxy$. D. $bx-cxy = by$. D. $x = \frac{by}{b-cy}$. Il n'y a plus qu'à choiſir pour y un Nombre tel que $cy < b$.

Si j'avois demandé $x-y. xy :: b. c$, j'aurois eu $x = \frac{cy}{c-cy}$; & ſi en ce cas, $b > c$, il eſt viſible que y doit être un Nombre rompu, afin que $by < c$. Si $c = 3. b = 5. y = \frac{1}{4}. x = \frac{3}{7}$.

97. On demande deux Nombres, dont l'un étant ajoûté au Quarré de l'autre, cette Somme ſoit la Racine d'un Quarré égal aux deux Nombres.

Les conditions executées donnent $\overline{x+y}^2 = xx+y$
$= x^4 + 2xxy + yy$.

Cela paroît d'abord très-paradoxe, mais on en doit conclure, que x & y doivent être des Fractions, dont les Produits ne croîtront pas, comme font les Produits des Nombres entiers.

J'ai $x^4 + 2xxy + yy - y = x$; le Quarré eſt détruit : je cherche à y ajoûter quelque choſe qui ramene ce premier Membre à être quarré. Je vois que $xx+y-\frac{1}{2} \times xx+y-\frac{1}{2} = x^4 + 2xxy$
$-xx+yy-y+\frac{1}{4}$. J'ajoûte $\frac{1}{4} - xx$ de côté

& d'autre, & j'ai $x^4 + 2xxy - xx + yy - y + \frac{1}{4} = x - xx + \frac{1}{4}$.

Donc $xx + y - \frac{1}{2} = \sqrt{x - xx + \frac{1}{4}}$. D. $y = \frac{1}{2} - xx + \sqrt{x - xx + \frac{1}{4}}$.

Dès là je vois que si $x - xx + \frac{1}{4}$ est un vrai Quarré, y sera un vrai Nombre.

Soit donc $zz - \frac{1}{2} = \sqrt{x - xx + \frac{1}{4}}$. Donc $zzxx - zx + \frac{1}{4} = x - xx + \frac{1}{4}$. Donc $zzxx - zx = x - xx$, & $zzx - z = 1 - x$, & $zzx + x = z + 1$, & $x = \frac{z+1}{zz+1}$. Soit $z = 5$, on aura $x = \frac{6}{25+1} = \frac{3}{13}$.

On a $y = \frac{1}{2} - xx + \sqrt{x - xx + \frac{1}{4}}$, & $\sqrt{x - xx + \frac{1}{4}} = xz - \frac{1}{2}$. Donc on aura $y = \frac{1}{2} - xx + xz - \frac{1}{2} = xz - xx = \frac{3}{13} \times 5 - \frac{9}{169} = \frac{186}{169}$.

Donc $x + y = \frac{3}{13} + \frac{186}{169} = \frac{225}{169}$. Sa Racine est $\frac{15}{13} = xx + y = \frac{9}{169} + \frac{186}{169} = \frac{195}{169} = \frac{15}{13}$.

98. $y^3 + aby = aac$. Je veux changer cela

en une Equation, où il ne manque aucun Terme. Je fais, 1°. $a. y :: y. x$. Donc $ax = yy$. Donc $x = \frac{yy}{a}$.

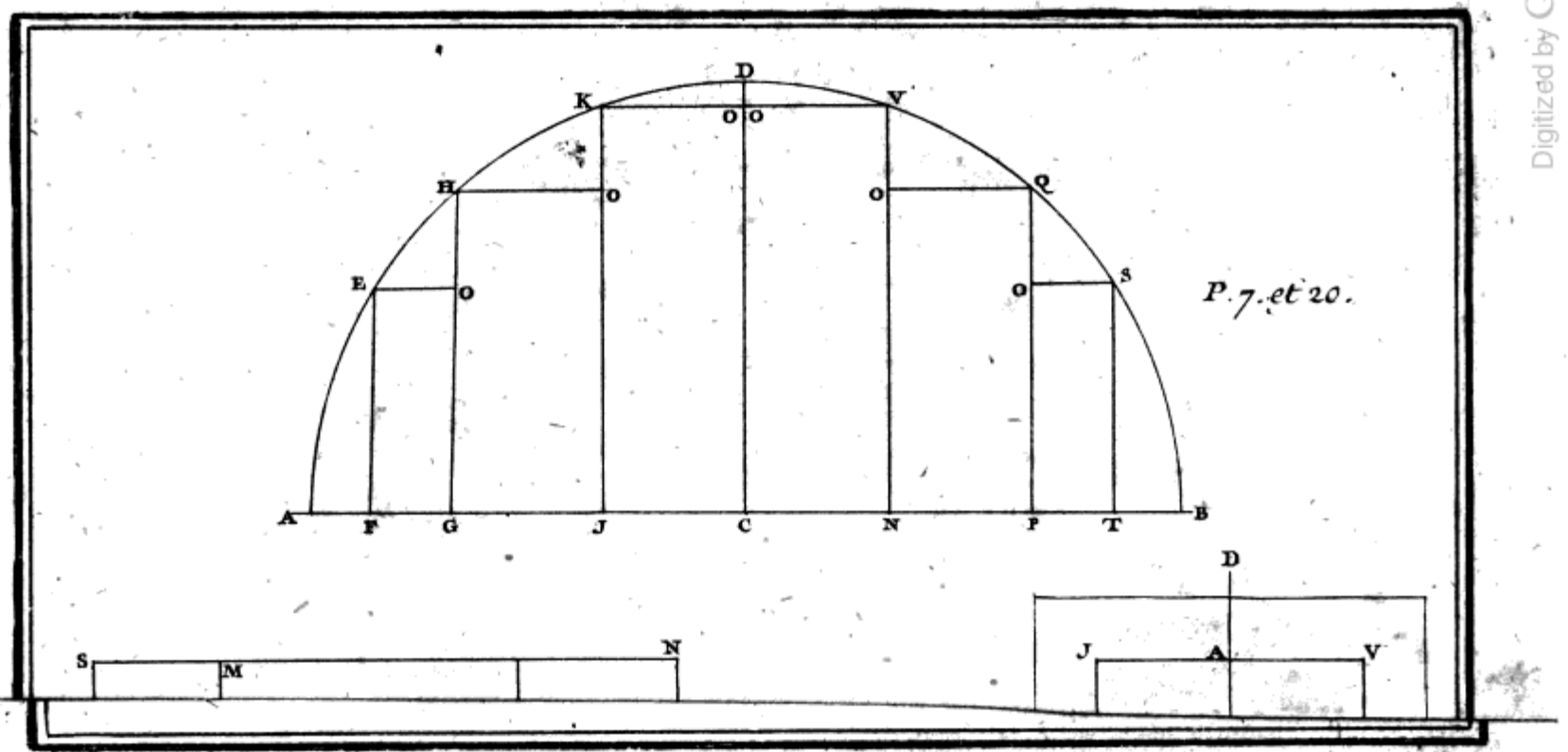
2°. Puiſque $y^3 + aby = aac$, on a $a. y :: yy + ab. ac$, on aura donc $y. x :: yy + ab. ac$; & comme $yy = ax$, on aura $y. x :: ax + ab. c. :: x + b. c$. Donc $cy = xx + bx$. Donc $c\sqrt{ax} = xx + bx$, & $x^4 + 2bx^3 + bbxx = ccax$, & $x^3 + 2bxx + bbx - ccx = 0$.

99. Dans la Section des Progreſſions Arithmetiques, j'avois renvoïé à l'Analyſe la Solution de quelques Problêmes. Dans l'Article 11e, le premier Terme eſt 3, la Difference 2, la Somme des Termes 168; on demande le Nombre des Termes. Le premier Terme étant 3, le dernier ſera $3 + n2 - 2$ (ſi on appelle n le Nombre des Termes qu'on cherche). Donc $6 + n2 - 2 \times \frac{n}{2} = 3n + nn - n = 168$. Donc $nn + 2n = 168$. Donc $nn + 2n + 1 = 169$. D. $\sqrt{nn + 2n + 1} = n + 1 = 13$. D. $n = 12$.

100. Dans l'Article 25, j'ai 4 pour Difference, 43 pour dernier Terme, & 250 pour Somme; on demande le premier Terme. Appellons-le x. Le dernier $43 = x + 4n - 4$. (En appellant n le Nombre des Termes). D. $x + 4n = 47$. Or, comme n, Nombre des Termes, eſt un Nombre Entier, c'eſt pour le plus 11. Si nous faiſons $n = 11$, x ſera $= 3$; ſi nous faiſons $n = 9$, x ſera $= 11$.

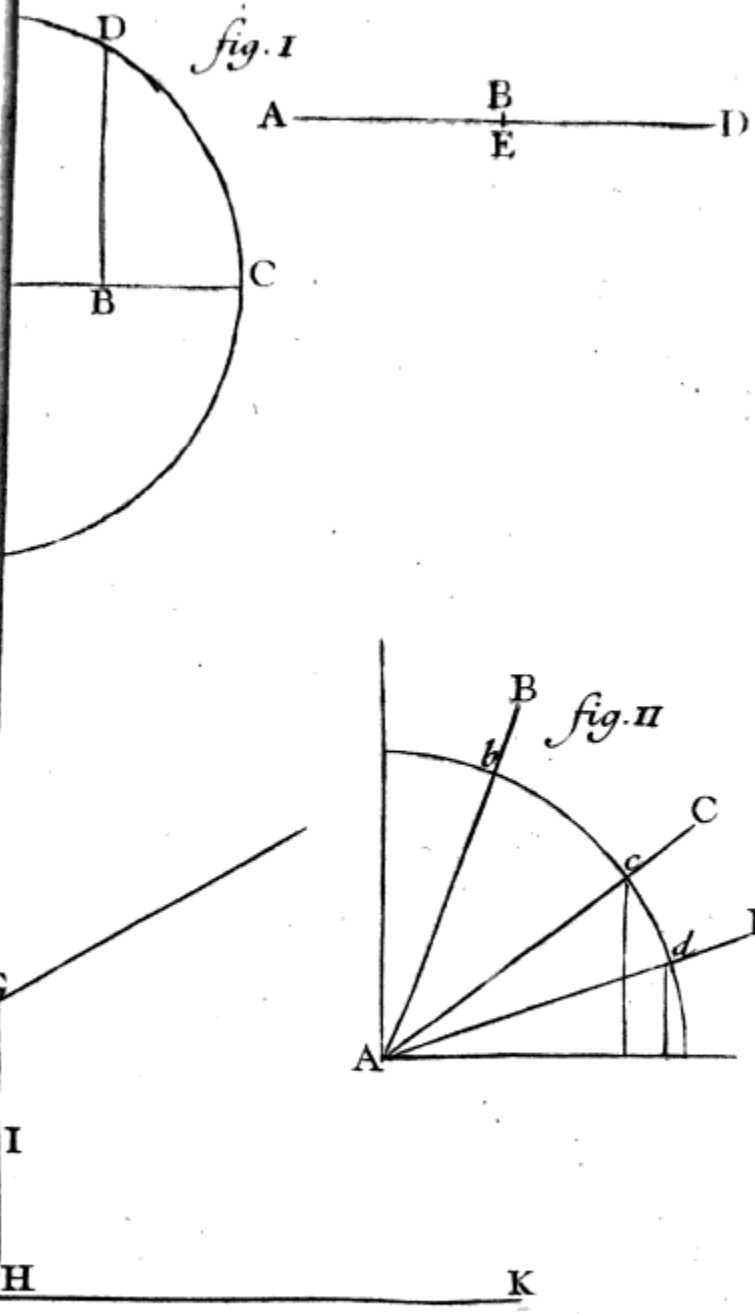
Mais d'un autre côté, j'ai $2x + 4n - 4 \times \frac{n}{2} = nx + 2nn - 2n = 250$. Donc

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

$x + 2n - 2 = \frac{250}{n}$. Soit que je faſſe $n = 11$, & $x = 3$. Soit $n = 9$, & $x = 11$; je n'aurai pas $2 + 4n = 47$ d'un côté, & $x + 2n - 2 = \frac{250}{n}$ de l'autre. J'ai trop dans un cas, & trop peu dans l'autre. Si je ſuppoſe $n = 10$, je ſatisfais aux deux Equations.

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

0056543354

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google